1.2. Перепутанные состояния

Рассмотрим составную квантовую систему, состоящую из двух подсистем A и B. Чистое состояние полной системы $|\psi_{AB}\rangle$ называется *факторизованным* или *сепарабельным*, если каждая подсистема находится в чистом состоянии, т.е. если $|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle|\psi_B\rangle$. В противном случае состояние $|\psi_{AB}\rangle$ называется *перепутанным*.

Обозначим через $\{|i_A\rangle\}$ и $\{|i_B\rangle\}$ ортонормированные базисы в пространствах состояний H_A и H_B подсистем A и B, соответственно. В

общем случае, произвольное чистое состояние полной системы $|\psi_{AB}\rangle$ имеет вид

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i_A=1}^{\mathrm{dim}H_A} \sum_{i_B=1}^{\mathrm{dim}H_B} c_{i_A i_B} |i_A\rangle|i_B\rangle, \tag{1.10}$$

где $c_{i_A i_B}$ — комплексные числа, удовлетворяющие условию нормировки $\sum_{i_A}\sum_{i_B} |c_{i_A i_B}|^2 = 1$. Однако для любого чистого состояния $|\psi_{AB}\rangle$ существуют такие ортонормированные базисы $\{|i_A\rangle\}$ и $\{|i_B\rangle\}$, что справедливо следующее *разложение Шмидта*:

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^{M} \sqrt{p_i}\, |i_A\rangle|i_B\rangle, \tag{1.11}$$

где $\sqrt{p_i}$ — неотрицательные вещественные числа (*коэффициенты Шмидта*), удовлетворяющие условию $\sum_i^M p_i = 1$, и $M = \min\{\mathrm{dim}H_A, \mathrm{dim}H_B\}$. Если число членов в разложении Шмидта (*число Шмидта*) равно единице, то состояние каждой подсистемы является чистым, а состояние полной системы $|\psi_{AB}\rangle$ — факторизованным (сепарабельным). В противном случае, состояние каждой подсистемы является смешанным, а состояние $|\psi_{AB}\rangle$ — перепутанным.

Примером перепутанных состояний системы двух кубитов являются состояния Белла:

$$|\phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \tag{1.12}$$

$$|\psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle), \tag{1.13}$$

образующие ортонормированный базис в пространстве состояний двухкубитовой системы.

Если полная система, состоящая из двух подсистем A и B, находится в смешанном состоянии, то понятия перепутанного и неперепутанного состояний обобщаются следующим образом. Смешанное состояние ρ_{AB} называется *сепарабельным*, если его можно записать в виде выпуклой комбинации локальных состояний:

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i, \tag{1.14}$$

где $\forall i \; p_i > 0$ и $\sum_i p_i = 1$. В противном случае смешанное состояние называется *перепутанным*. Частным случаем сепарабельного состояния является *факторизованное* состояние, для которого $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$.

Необходимое условие сепарабельности (*критерий Переса—Городецких*): если состояние ρ_{AB} является сепарабельным, то $\rho_A^T \geqslant 0$, где ρ_A^T — результат частичного транспонирования (по переменным системы A) матрицы плотности в любом базисе и $\rho \geqslant 0$ обозначает неотрицательность матрицы плотности (собственные значения $\geqslant 0$ или $\langle\psi|\rho|\psi\rangle \geqslant 0$ $\forall|\psi\rangle$). Данный критерий является необходимым и достаточным условием сепарабельности в двух случаях: когда система состоит из двух кубитов (2×2) или из кубита и кутрита (2×3).