

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**



ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ

С.А. Чивилихин
КВАНТОВАЯ ИНФОРМАТИКА

Учебное пособие



Санкт-Петербург

2009

УДК 535

С.А.Чивилихин. Квантовая информатика. Учебное пособие, – СПб: СПбГУИТМО, 2009. – 80с.

В пособии рассматриваются основные принципы квантовой теории информации, а также ее приложения к квантовым вычислениям и квантовой передаче информации.

Учебное пособие предназначено для студентов СПбГУ ИТМО специальностей NN 2006006802, 010500. Рекомендовано к печати Ученым Советом факультета фотоники и оптоинформатики, протокол N5 от 18 февраля 2009 г.



В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

© Санкт-Петербургский государственный университет
информационных технологий, механики и оптики, 2009

© Чивилихин С.А., 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Глава 1. Основные принципы квантовой информатики	5
1.1. Кубит	5
1.2. Однокубитовые логические элементы	9
Глава 2. Примеры однокубитовых элементов	13
2.1. Логический элемент NOT	13
2.2. Логический элемент Z	17
2.3. Логический элемент Адамара H	20
2.4. Логический элемент Y	22
2.5. Логический элемент $\frac{\pi}{8}$	24
2.6. Логический элемент S	27
2.7. Логический элемент Ф	30
Глава 3. Двухкубитовые системы	34
3.1. Двухкубитовые состояния и операторы	34
3.2. Двухкубитовый квантовый логический элемент CNOT	37
3.3. Попытка копирования неизвестного кубита с помощью двухкубитового квантового элемента CNOT	42
Глава 4. Квантовые схемы	45
4.1. Однокубитовые квантовые схемы. Введение	45
4.2. Однокубитовые квантовые схемы, построенные из одинаковых элементов	47
4.3. Однокубитовые квантовые схемы, построенные из разных элементов	51
4.4. Двухкубитовые квантовые схемы	51
4.5. Квантовая схема, создающая состояние Белла	56
Глава 5. Прикладные аспекты квантовой информатики	62
5.1. Алгоритм распознавания функций (алгоритм Дойча)	62
5.2. Сверхплотное кодирование	66
5.3. Квантовая телепортация	69
Глава 6. Информационная энтропия	72
6.1. Классическая информационная энтропия	72
6.2. Квантовая информационная энтропия	73
Литература	78
История кафедры фотоники и оптоинформатики	79

ПРЕДИСЛОВИЕ

Квантовая информатика – новый раздел науки, посвященный использованию квантовых объектов для обработки и передачи информации. В настоящее время большие усилия прикладываются к разработке квантового компьютера. Создаются квантовые элементы, строятся квантовые алгоритмы и разрабатывается архитектура квантового компьютера. Другое перспективное направление квантовой информатики – квантовая криптография. Квантовые методы передачи гарантируют невозможность расшифровки сообщения. Идея создания перепутанных состояний, высказанная в свое время Эйнштейном, Подольским и Розеном, позволяет передавать сообщения по квантовому каналу – без непосредственной связи между передатчиком и приемником. Однако один бит информации должен быть при этом передан по классическому каналу.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Д.В. Лашкину за ценные замечания.

Глава 1. Основные принципы квантовой информатики

1.1. Кубит

Кубитом называется квантовая система, которая может находиться в двух состояниях $|0\rangle$ и $|1\rangle$ (обозначения Дирака [1]). Примером такой системы может служить фотон с двумя возможными поляризациями или электрон с двумя возможными направлениями спина. В общем случае, состояние такой системы задается волновой функцией вида:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (1.1)$$

где α и β - комплексные коэффициенты. При измерении состояния системы с волновой функцией (1.1), вероятность обнаружить ее в состоянии $|0\rangle$ равна $|\alpha|^2$, а вероятность обнаружить ее в состоянии $|1\rangle$ равна $|\beta|^2$. Сумма этих вероятностей равна единице:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (1.2)$$

Волновую функцию $|\psi\rangle$ будем рассматривать, как вектор в двумерном линейном пространстве. При этом волновые функции $|0\rangle$ и $|1\rangle$ играют роль базиса этого пространства. Наряду с вектором $|\psi\rangle$, введем эрмитово-сопряженный вектор $\langle\psi| \equiv |\psi\rangle^+$. Тогда скалярное произведение двух векторов $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ запишем в виде $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$. Будем считать основные состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ ортонормированными:

$$\langle 0|0\rangle = 1, \quad \langle 1|1\rangle = 1, \quad \langle 0|1\rangle = 0. \quad (1.3)$$

Тогда из условия нормировки волнового вектора кубита $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ сразу вытекает требование (1.2) на коэффициенты α и β .

Кубит допускает геометрическое изображение. Рассмотрим сначала случай вещественных коэффициентов α и β .

В этом случае удобно использовать тригонометрическое представление:

$$\alpha = \cos \phi, \quad \beta = \sin \phi. \quad (1.4)$$

Тогда условие (1.2) выполняется автоматически. На плоскости (α, β) условие (1.2) задает единичную окружность с центром в начале координат – см. рис.1.

При $\phi = 0$, в соответствии с (1.4), (1.1) мы получаем $|\psi\rangle = |0\rangle$, а при $\phi = \frac{\pi}{2}$, $|\psi\rangle = |1\rangle$.

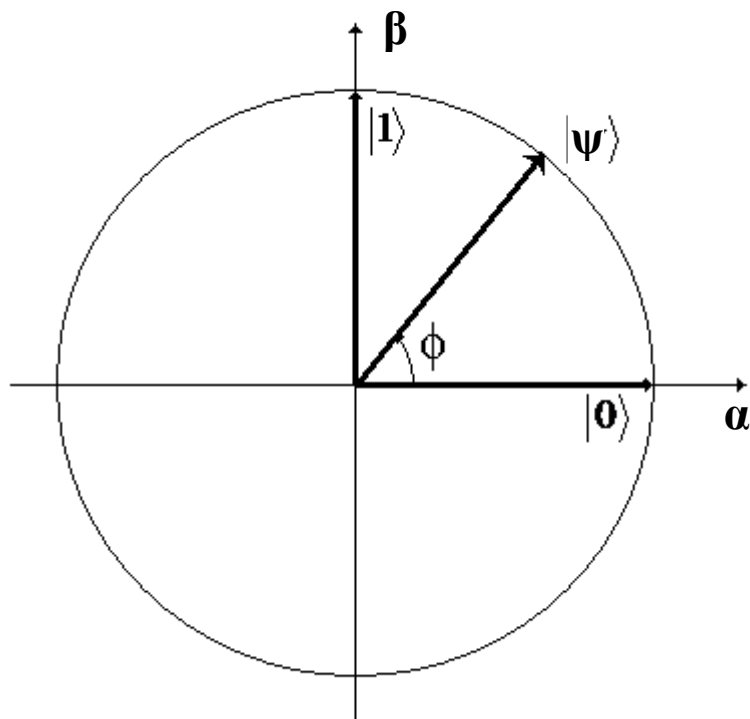


Рис.1. Геометрическое изображение кубита $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ для случая вещественных коэффициентов α и β .

В общем случае комплексных коэффициентов α и β , они могут быть представлены в виде:

$$\alpha = e^{i\gamma} \cos \frac{\vartheta}{2}, \quad \beta = e^{i\lambda} \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Тогда кубит (1.1) принимает вид:

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + e^{i\lambda} \sin \frac{\vartheta}{2} |1\rangle,$$

или

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + e^{i(\lambda-\gamma)} \sin \frac{\vartheta}{2} |1\rangle \right).$$

Фазовый множитель во многих случаях оказывается несущественным. Опуская этот множитель и обозначая

$$\phi = \lambda - \gamma$$

представим кубит в виде:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\vartheta}{2} |1\rangle. (1.5)$$

Таким образом, полученное представление кубита имеет два параметра - ϑ и ϕ . Будем интерпретировать их как углы сферической системы координат – см. рис.2.

Кубит представляется вектором единичной длины в трехмерном пространстве. Такое геометрическое изображение кубита называется его представлением на сфере Блоха. В соответствии с (1.5), при $\vartheta = 0$ получаем базисный $|0\rangle$, а при $\vartheta = \pi$, $|\psi\rangle = |1\rangle$ (с точностью до фазового множителя $e^{i\phi}$).

На сфере Блоха бесконечно много точек. Соответственно, кубит может находиться в одном из бесконечного множества состояний. Казалось бы, используя один кубит, можно хранить бесконечно много информации. Однако, на самом деле это не так. При измерении состояния кубита, он может быть найден в одном из двух возможных состояний - $|0\rangle$ или $|1\rangle$.

Соответственно, мы можем извлечь из кубита один бит информации. Если бы мы могли получить много одинаковых копий нашего кубита и провести измерение состояния каждой копии, то с вероятностью $|\alpha|^2$ мы бы нашли кубит в состоянии $|0\rangle$, а с вероятностью $|\beta|^2$ - в состоянии $|1\rangle$. Число $|\alpha|^2$ может принимать бесконечно много значений. Таким образом, мы

получили бы бесконечно много информации, закодированной в одном кубите.

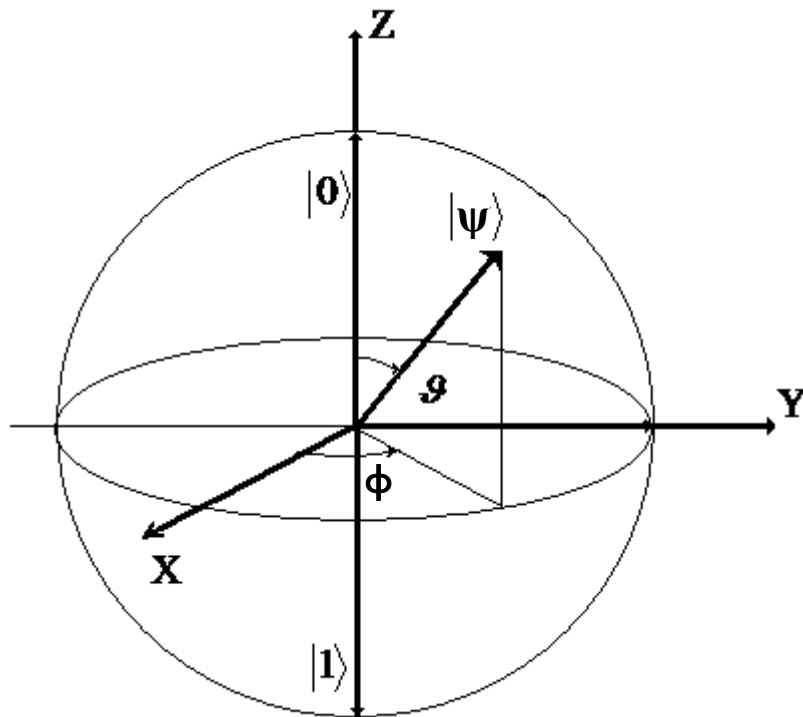


Рис.2. Геометрическое изображение кубита $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ для случая комплексных коэффициентов α и β - сфера Блоха.

Для этого мы должны были бы, в начале, получить сколь угодно копий нашего кубита. Однако существует теорема о невозможности клонирования кубита в неизвестном состоянии, которая будет изложена ниже. Таким образом, из одного кубита можно получить только один бит информации.

1.2. Однокубитовые логические элементы

Напомним, что кубит представляет собой квантовую систему, состояние которой задается волновым вектором $|\psi\rangle$ (1). Физическое воздействие на эту систему переводит ее в другое состояние $|\tilde{\psi}\rangle$:

$$|\tilde{\psi}\rangle = \tilde{\alpha}|0\rangle + \tilde{\beta}|1\rangle. \quad (1.6)$$

В квантовой механике, любое воздействие на систему описывается линейным оператором \hat{U} , действующим на вектор состояния системы:

$$|\tilde{\psi}\rangle = \hat{U}|\psi\rangle. \quad (1.7)$$

Линейность оператора \hat{U} вытекает из линейности уравнения Шредингера. В самом деле, пусть $|\Psi\rangle$ - зависящий от времени вектор состояния системы. Уравнение Шредингера с гамильтонианом \hat{H} запишем в виде:

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\Psi\rangle. \quad (1.8)$$

Пусть, для простоты, гамильтониан системы не зависит от времени. Тогда, решение уравнения (1.8) с начальным условием:

$$|\Psi\rangle|_{t=0} = |\psi\rangle$$

может быть записано в виде:

$$|\tilde{\psi}\rangle = \exp(-i\hat{H}t / \hbar) |\psi\rangle. \quad (1.9)$$

Сравнение (1.9) с (1.7), позволяет связать линейный оператор \hat{U} с гамильтонианом \hat{H} , описывающим внешнее воздействие на кубит:

$$\hat{U} = \exp(-i\hat{H}t / \hbar). \quad (1.10)$$

Оператор Гамильтона должен быть эрмитовым:

$$\hat{H}^+ \hat{H} = I \quad (I - \text{единичный оператор}),$$

для того, чтобы его собственные числа – допустимые значения энергии системы, были бы вещественными. Тогда из (1.10) вытекает, что оператор \hat{U} должен быть унитарным:

$$\hat{U}^+ \hat{U} = \exp(-i\hat{H}t/h) \exp(i\hat{H}^+t/h) = I. \quad (1.11)$$

Унитарность оператора \hat{U} означает, что если исходное состояние системы нормировано

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1, \quad (1.12)$$

то и состояние, в которое система переходит после взаимодействия, также является нормированным. В самом деле, согласно (1.7), (1.11) и (1.12), получаем

$$\langle \tilde{\psi} | \tilde{\psi} \rangle = \langle \psi | \hat{U}^+ \hat{U} | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1. \quad (1.13)$$

Унитарный оператор всегда обратим:

$$\hat{U}^+ \hat{U} = I \Rightarrow \hat{U}^+ \hat{U} \hat{U}^{-1} = \hat{U}^{-1} \Rightarrow \hat{U}^{-1} = \hat{U}^+. \quad (1.14)$$

В дальнейшем, воздействие на кубит (или на систему кубитов) мы будем рассматривать, как процесс вычисления. При этом вектор $|\psi\rangle$ играет роль входного сигнала, оператор \hat{U} определяет вычислительный процесс, а вектор $|\tilde{\psi}\rangle$ представляет собой результат вычисления – см. рис.3.

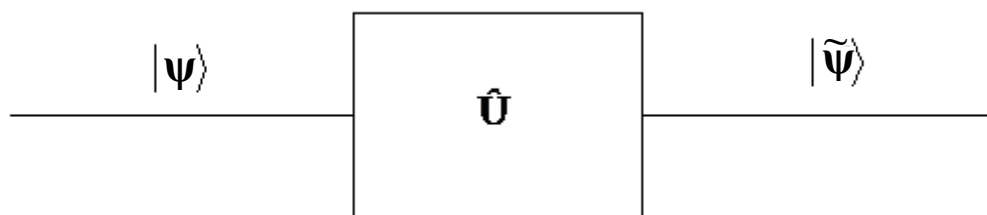


Рис.3. Квантовый логический элемент \hat{U} преобразует вектор $|\psi\rangle$ в вектор $|\tilde{\psi}\rangle$.

Согласно (1.14) каждый квантовый вычислительный процесс обратим. То есть, если в результате вычислительного процесса \hat{U} входной сигнал $|\psi\rangle$

был преобразован в выходной сигнал $|\tilde{\psi}\rangle$, то существует обратный квантовый вычислительный процесс \hat{U}^{-1} , который осуществляет обратное преобразование – см. рис.4. Отметим, что классические вычислительные процессы не всегда обратимы.

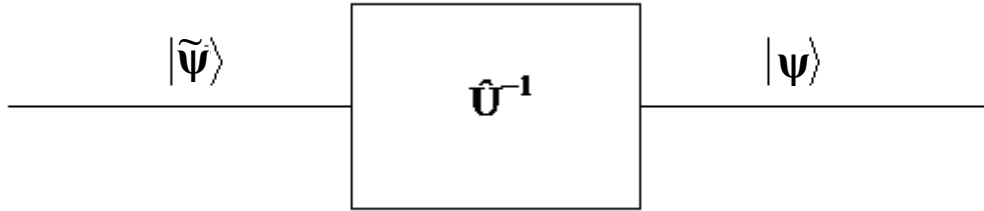


Рис.4. Квантовый логический элемент \hat{U}^{-1} преобразует вектор $|\tilde{\psi}\rangle$ в вектор $|\psi\rangle$.

В дальнейшем мы будем использовать *матричное представление операторов* \hat{U} . Опишем соответствующие конструкции. Рассмотрим действие оператора на кубит. В силу линейности оператора

$$\hat{U}|\psi\rangle = \tilde{\alpha}|0\rangle + \tilde{\beta}|1\rangle = \hat{U}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha\hat{U}|0\rangle + \beta\hat{U}|1\rangle. \quad (1.15)$$

Таким образом, действие оператора на кубит определяется его действием на базисные вектора, $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Эти вектора образуют ортонормированный базис в двумерном гильбертовом пространстве. Это значит, что любой вектор этого пространства может быть разложен по базисным векторам. Запишем разложение векторов $\hat{U}|0\rangle$ и $\hat{U}|1\rangle$ по базису $|0\rangle, |1\rangle$:

$$\begin{aligned} \hat{U}|0\rangle &= U_{00}|0\rangle + U_{10}|1\rangle, \\ \hat{U}|1\rangle &= U_{01}|0\rangle + U_{11}|1\rangle. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Согласно (1.16), коэффициенты разложения U_{mn} могут быть рассчитаны как

$$\begin{aligned} U_{00} &= \langle 0|\hat{U}|0\rangle, & U_{10} &= \langle 1|\hat{U}|0\rangle, \\ U_{01} &= \langle 0|\hat{U}|1\rangle, & U_{11} &= \langle 1|\hat{U}|1\rangle. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Подставляя (1.16) в (1.15), получаем

$$\tilde{\alpha}|0\rangle + \tilde{\beta}|1\rangle = \alpha(U_{00}|0\rangle + U_{10}|1\rangle) + \beta(U_{01}|0\rangle + U_{11}|1\rangle)$$

или

$$|\tilde{\psi}\rangle = \tilde{\alpha}|0\rangle + \tilde{\beta}|1\rangle = (U_{00}\alpha + U_{01}\beta)|0\rangle + (U_{10}\alpha + U_{11}\beta)|1\rangle.$$

Таким образом, коэффициенты разложения вектора $|\tilde{\psi}\rangle$ выражены через коэффициенты разложения исходного вектора $|\psi\rangle$ в виде:

$$\tilde{\alpha} = U_{00}\alpha + U_{01}\beta, \quad \tilde{\beta} = U_{10}\alpha + U_{11}\beta. \quad (1.18)$$

Введем вектора

$$\psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix},$$

соответствующие начальному и конечному состояниям кубита и матрицу

$$U = \begin{pmatrix} U_{00} & U_{01} \\ U_{10} & U_{11} \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Тогда выражение (1.18), связывающее новые и старые компоненты векторов, можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{00} & U_{01} \\ U_{10} & U_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

или

$$\tilde{\psi} = U\psi. \quad (1.21)$$

Матрица U называется матричным представлением оператора \hat{U} . Свойство (1.11) унитарности оператора \hat{U} приводит к требованию унитарности его матрицы:

$$U^+U = \begin{pmatrix} U_{00}^* & U_{10}^* \\ U_{01}^* & U_{11}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{00} & U_{01} \\ U_{10} & U_{11} \end{pmatrix} = I. \quad (1.22)$$

Глава 2. Примеры однокубитовых элементов

2.1. Логический элемент NOT

Обозначим квантовый логический элемент NOT через \hat{X} . Определим сначала действие этого оператора на базисные вектора. Потребуем, чтобы он переводил $|0\rangle$ в $|1\rangle$, а $|1\rangle$ в $|0\rangle$:

$$\begin{aligned}\hat{X}|0\rangle &= |1\rangle, \\ \hat{X}|1\rangle &= |0\rangle.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Тем самым квантовый оператор NOT становится естественным обобщением классического оператора NOT. Используя линейность оператора \hat{X} , определим действие оператора на произвольный кубит:

$$\hat{X}|\psi\rangle = \hat{X}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha\hat{X}|0\rangle + \beta\hat{X}|1\rangle.$$

Используя (2.1), получаем

$$\hat{X}|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle.\tag{2.2}$$

Таким образом, оператор \hat{X} меняет местами коэффициенты при базисных векторах $|0\rangle$ и $|1\rangle$.

Сравнивая (2.1) с (1.16), находим матричные элементы X_{mn} оператора \hat{X} :

$$\begin{aligned}X_{00} &= 0, & X_{10} &= 1, \\ X_{01} &= 1, & X_{11} &= 0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Запишем матрицу X оператора X_{mn} :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\tag{2.4}$$

Подействуем этой матрицей на вектор входного кубита. Тогда получаем

вектор выходного кубита в виде:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

в соответствии с (2.2).

Полученная матрица X является унитарной. В самом деле,

$$X^+X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Действие оператора \hat{X} на кубит

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

для вещественных α и β легко интерпретировать геометрически. В вещественном случае используем тригонометрическое представление

$$\alpha = \cos \phi, \quad \beta = \sin \phi, \quad \tilde{\alpha} = \cos \tilde{\phi}, \quad \tilde{\beta} = \sin \tilde{\phi}. \quad (2.6)$$

Тогда, согласно (2.5), (2.6),

$$\tilde{\phi} = \frac{\pi}{2} - \phi. \quad (2.7)$$

Таким образом, оператор \hat{X} поворачивает единичный вектор, изображающий кубит на единичной окружности, отражая его от биссектрисы первого и третьего координатных углов – см. рис.4.

Найдем собственные числа λ и собственные вектора $|\psi\rangle_\lambda$ оператора \hat{X} :

$$\hat{X}|\psi\rangle_\lambda = \lambda|\psi\rangle_\lambda,$$

или, в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_\lambda = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_\lambda.$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0.$$

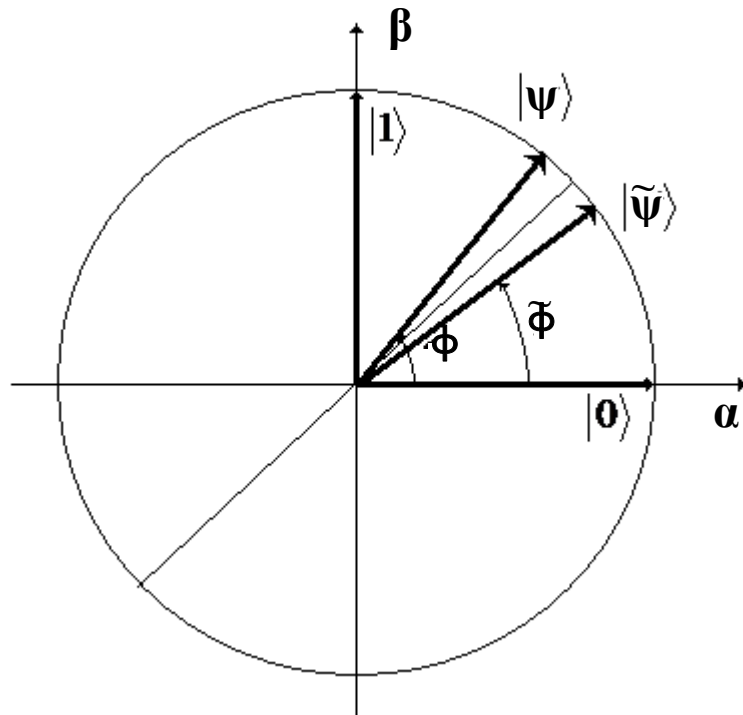


Рис.4. Геометрическое изображение преобразования NOT для случая вещественных коэффициентов α и β .

Собственные числа матрицы X определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

Отсюда:

$$\lambda_{1,2} = \pm 1.$$

В свою очередь, собственные вектора матрицы X определяются из условия:

$$-\lambda\alpha + \beta = 0,$$

или

$$\beta = \lambda \alpha .$$

Полагая $\lambda_{1,2} = \pm 1$, имеем:

$$\beta_1 = \lambda \alpha_1, \quad \beta_2 = -\alpha_2 .$$

Выбирая $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, получаем $\beta_{1,2} = \pm 1$. Собственные вектора имеют вид:

$$|\psi\rangle_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix},$$

или, в нормированном виде:

$$|\tilde{\psi}\rangle_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}.$$

2.2 Логический элемент Z

Определим сначала действие оператора \hat{Z} на базисные вектора. Потребуем, чтобы он не изменял $|0\rangle$, а $|1\rangle$ переводил в $-|1\rangle$:

$$\begin{aligned}\hat{Z}|0\rangle &= |0\rangle, \\ \hat{Z}|1\rangle &= -|1\rangle.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Используя линейность оператора \hat{Z} , определим действие оператора на произвольный кубит:

$$\hat{Z}|\psi\rangle = \hat{Z}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha\hat{Z}|0\rangle + \beta\hat{Z}|1\rangle.$$

Используя (2.8), получаем:

$$\hat{Z}|\psi\rangle = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle.\tag{2.9}$$

Таким образом, оператор \hat{X} не изменяет коэффициент при базисном векторе $|0\rangle$ и меняет знак коэффициента при базисном векторе $|1\rangle$. Сравнивая (2.8) с (1.16), находим матричные элементы Z_{mn} оператора \hat{Z} :

$$\begin{aligned}Z_{00} &= 1, & Z_{10} &= 0, \\ Z_{01} &= 0, & Z_{11} &= -1.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Запишем матрицу Z оператора Z_{mn} :

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\tag{2.11}$$

Подействуем этой матрицей на вектор входного кубита. Тогда получаем вектор выходного кубита в виде:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix},\tag{2.12}$$

в соответствии с (2.9).

Полученная матрица Z является унитарной. В самом деле,

$$Z^+Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Действие оператора \hat{Z} на кубит:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

для вещественных α и β легко интерпретировать геометрически. В вещественном случае используем тригонометрическое представление

$$\alpha = \cos\phi, \quad \beta = \sin\phi, \quad \tilde{\alpha} = \cos\tilde{\phi}, \quad \tilde{\beta} = \sin\tilde{\phi}. \quad (2.13)$$

В самом деле, согласно (2.6), (2.7),

$$\tilde{\phi} = -\phi. \quad (2.14)$$

Таким образом, оператор \hat{Z} поворачивает единичный вектор, изображающий кубит на единичной окружности, отражая его от оси абсцисс – см. рис.5.

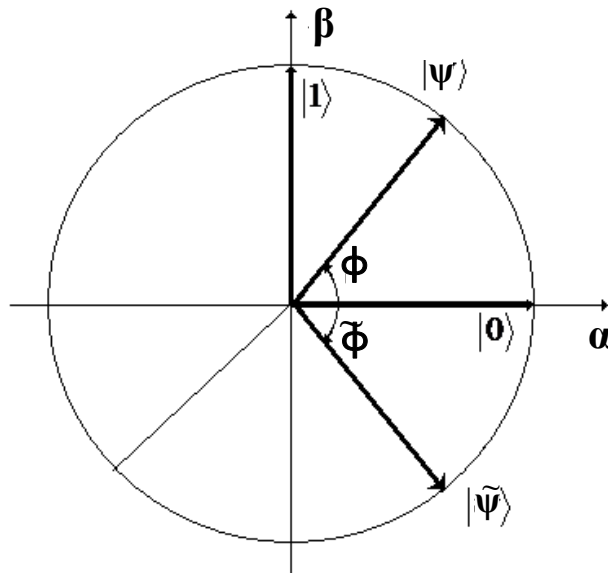


Рис.5. Геометрическое изображение преобразования \hat{Z} для случая вещественных коэффициентов α и β .

В общем случае комплексных α и β , кубит можно представить в виде (5)

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\vartheta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\vartheta}{2}|1\rangle.$$

Оператор \hat{Z} меняет знак коэффициента при базисном векторе $|1\rangle$. Это соответствует замене $\vartheta \rightarrow -\vartheta$. На сфере Блоха это соответствует отражению от горизонтальной плоскости – см. рис.6.

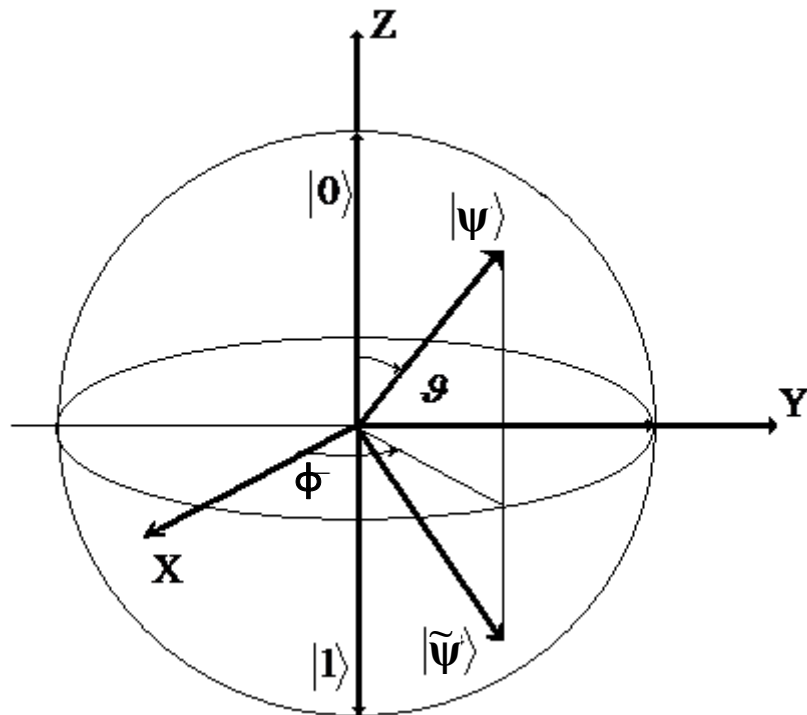


Рис.6. Геометрическое изображение преобразования \hat{Z} на сфере Блоха для случая комплексных коэффициентов α и β .

2.3 Логический элемент Адамара Н

Элемент Адамара задается матрицей

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Поддействуем этой матрицей на вектор входного кубита. Тогда получаем вектор выходного кубита в виде:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Соответствующий оператор \hat{H} действует на кубит по правилу

$$\hat{H}|\psi\rangle = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}|1\rangle. \quad (2.17)$$

Матрица H является унитарной. В самом деле,

$$H^+H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I.$$

Из унитарности матрицы оператора вытекает унитарность самого оператора.

Найдем собственные числа λ и собственные вектора $|\psi\rangle_\lambda$ оператора \hat{H} :

$$\hat{H}|\psi\rangle_\lambda = \lambda|\psi\rangle_\lambda,$$

или, в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_\lambda = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_\lambda.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_\lambda = 0.$$

Собственные числа матрицы X определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$$

В свою очередь, собственные вектора матрицы H определяются из условия

$$(1-\lambda)\alpha + \beta = 0,$$

или

$$\beta = (\lambda - 1)\alpha.$$

Полагая $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, имеем

$$\beta_1 = (\sqrt{2} - 1)\alpha_1, \quad \beta_2 = (-\sqrt{2} - 1)\alpha_2.$$

Выбирая $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, получаем $\beta_{1,2} = \pm\sqrt{2} - 1$. Соответствующие собственные вектора имеют вид:

$$|\Psi\rangle_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix},$$

или, в нормированном виде:

$$|\tilde{\Psi}\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix},$$

$$|\tilde{\Psi}\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}.$$

2.4 Логический элемент Y

Элемент Y задается матрицей

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

В отличие от предыдущих рассмотренных нами элементов, элемент Y является комплексным.

Подействуем матрицей Y на вектор входного кубита. Тогда получаем вектор выходного кубита в виде:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\beta \\ i\alpha \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Соответствующий оператор \hat{Y} действует на кубит по правилу

$$\hat{Y}|\psi\rangle = -i\beta|0\rangle + i\alpha|1\rangle. \quad (2.20)$$

Матрица Y является унитарной. В самом деле,

$$Y^+Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Из унитарности матрицы оператора вытекает унитарность самого оператора.

Найдем собственные числа λ и собственные вектора $|\psi\rangle_\lambda$ оператора \hat{Y} :

$$\hat{Y}|\psi\rangle_\lambda = \lambda|\psi\rangle_\lambda,$$

или, в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_\lambda = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_\lambda.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0.$$

Собственные числа матрицы Y определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_{1,2} = \pm 1.$$

В свою очередь, собственные вектора матрицы Y определяются из условия

$$\lambda\alpha + i\beta = 0,$$

или

$$\beta = i\lambda\alpha.$$

Полагая $\lambda_{1,2} = \pm 1$, имеем

$$\beta_{1,2} = \pm i\alpha_{1,2},$$

Выбирая $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, получаем $\beta_{1,2} = \pm i$. Соответствующие собственные вектора имеют вид:

$$|\Psi\rangle_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix},$$

или, в нормированном виде:

$$|\tilde{\Psi}\rangle_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}.$$

2.5 Логический элемент $\frac{\pi}{8}$

Рассмотрим еще один комплексный логический элемент T , который часто обозначается $\frac{\pi}{8}$.

Элемент T задается матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\pi}{8}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Подействуем матрицей T на вектор входного кубита. Тогда получаем вектор выходного кубита в виде:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\pi}{8}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \exp\left(i\frac{\pi}{8}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Соответствующий оператор \hat{T} действует на кубит по правилу

$$\hat{T}|\psi\rangle = \hat{T}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle + \beta \exp\left(i\frac{\pi}{8}\right)|1\rangle. \quad (2.22)$$

Таким образом, оператор \hat{T} не изменяет коэффициент при базисном векторе $|0\rangle$ и меняет фазу коэффициента при базисном векторе $|1\rangle$.

Матрица T является унитарной. В самом деле,

$$T^+T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{\pi}{8}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\pi}{8}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Из унитарности матрицы оператора вытекает унитарность самого оператора. Представим кубит в виде (1.5)

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\vartheta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\vartheta}{2}|1\rangle.$$

Оператор \hat{T} меняет фазу коэффициента при базисном векторе $|1\rangle$. На сфере Блоха это соответствует повороту на угол $\frac{\pi}{8}$ вокруг оси Z – см. рис.7.

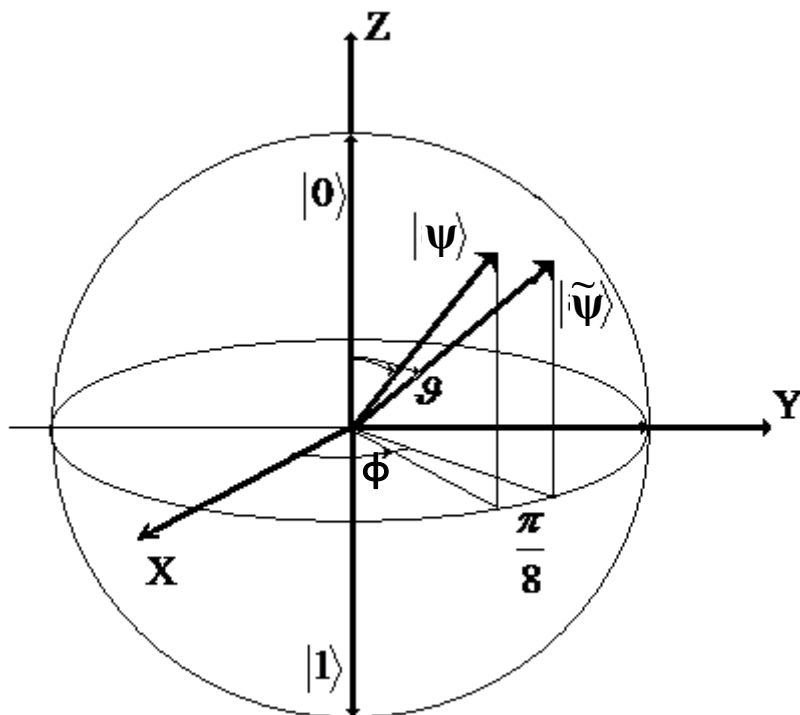


Рис.7. Геометрическое изображение преобразования $T \equiv \frac{\pi}{8}$ на сфере Блоха.

Найдем собственные числа λ и собственные вектора $|\psi\rangle_\lambda$ оператора \hat{T} :

$$\hat{T}|\psi\rangle_\lambda = \lambda|\psi\rangle_\lambda,$$

или, в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\pi}{8}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_\lambda = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_\lambda.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\pi}{8}\right)-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_\lambda = 0.$$

Собственные числа матрицы T определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\pi}{8}\right)-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\exp\left(i\frac{\pi}{8}\right)-\lambda\right) = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \exp\left(i\frac{\pi}{8}\right).$$

В свою очередь, собственные вектора матрицы T определяются согласно одному из двух условий

$$(1-\lambda)\alpha + 0\beta = 0,$$

или

$$0\alpha + \left(\exp\left(i\frac{\pi}{8}\right)-\lambda\right)\beta = 0$$

Полагая $\lambda = \lambda_1 = 1$, видим, что первое из уравнений удовлетворяется тождественно. Согласно второму уравнению,

$$\beta = \beta_1 = 0.$$

Полагая $\lambda = \lambda_2 = \exp\left(i\frac{\pi}{8}\right)$, видим, что второе из уравнений удовлетворяется тождественно. Согласно первому уравнению,

$$\alpha = \alpha_2 = 0.$$

Выбирая $\alpha_1 = \beta_2 = 1$, получаем.

$$|\psi\rangle_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, собственные вектора оператора \hat{T} совпадают с базисными векторами.

2.6 Логический фазовый элемент S

Определим сначала действие оператора \hat{S} на базисные вектора. Потребуем, чтобы он не изменял $|0\rangle$, а $|1\rangle$ переводил в $i|1\rangle$:

$$\hat{S}|0\rangle = |0\rangle, \tag{2.23}$$

$$\hat{S}|1\rangle = i|1\rangle.$$

Используя линейность оператора \hat{S} , определим действие оператора на произвольный кубит:

$$\hat{S}|\psi\rangle = \hat{S}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha\hat{S}|0\rangle + \beta\hat{S}|1\rangle.$$

Используя (2.23), получаем:

$$\hat{S}|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + i\beta|1\rangle. \tag{2.24}$$

Сравнивая (2.24) с (1.16), находим матричные элементы S_{mn} оператора \hat{S} :

$$S_{00} = 1, \quad S_{10} = 0, \tag{2.25}$$

$$S_{01} = 0, \quad S_{11} = i.$$

Запишем матрицу S оператора S_{mn} :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Подействуем этой матрицей на вектор входного кубита. Тогда получаем вектор выходного кубита в виде:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ i\beta \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

в соответствии с (2.24).

Полученная матрица S является унитарной. В самом деле,

$$S^+S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Из унитарности матрицы оператора вытекает унитарность самого оператора.

Представим кубит в виде (1.5)

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\vartheta}{2} |1\rangle.$$

Оператор \hat{S} меняет фазу коэффициента при базисном векторе $|1\rangle$. На сфере Блоха это соответствует повороту на угол $\frac{\pi}{4}$ – см. рис.8.

Найдем собственные числа λ и собственные вектора $|\psi\rangle_\lambda$ оператора \hat{S} :

$$\hat{S}|\psi\rangle_\lambda = \lambda|\psi\rangle_\lambda,$$

или, в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_\lambda = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_\lambda.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & i-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_\lambda = 0.$$

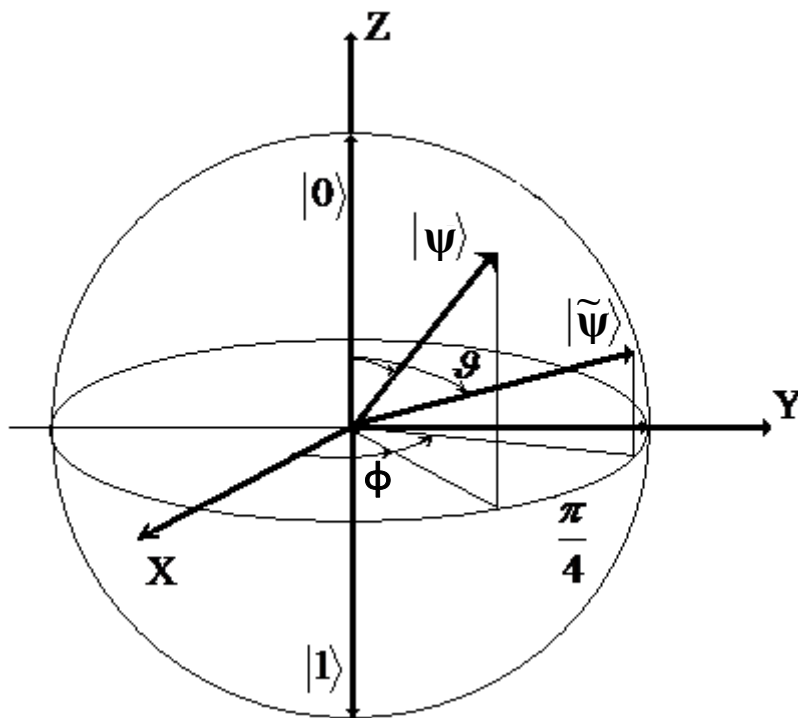


Рис.8. Геометрическое изображение преобразования S на сфере Блоха.

Собственные числа матрицы S определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & i-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(i-\lambda) = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = i.$$

В свою очередь, собственные вектора матрицы S определяются согласно одному из двух условий

$$(1-\lambda)\alpha + 0\beta = 0,$$

или

$$0\alpha + (i-\lambda)\beta = 0.$$

Полагая $\lambda = \lambda_1 = 1$, видим, что первое из уравнений удовлетворяется тождественно. Согласно второму уравнению,

$$\beta = \beta_1 = 0.$$

Полагая $\lambda = \lambda_2 = i$, видим, что второе из уравнений удовлетворяется тождественно. Согласно первому уравнению,

$$\alpha = \alpha_2 = 0.$$

Выбирая $\alpha_1 = \beta_2 = 1$, получаем.

$$|\Psi\rangle_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\Psi\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, собственные вектора оператора \hat{S} совпадают с базисными векторами.

2.7 Логический элемент Φ

Рассмотрим еще один комплексный логический элемент, который обозначим Φ .

Элемент Φ задается матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\phi_0) \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Поддействуем матрицей Φ на вектор входного кубита. Тогда получаем вектор выходного кубита в виде:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\phi_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \exp(i\phi_0) \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Соответствующий оператор $\hat{\Phi}$ действует на кубит по правилу

$$\hat{\Phi}|\psi\rangle = \hat{\Phi}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle + \beta \exp(i\phi_0)|1\rangle. \quad (2.30)$$

Таким образом, оператор $\hat{\Phi}$ не изменяет коэффициент при базисном векторе $|0\rangle$ и меняет фазу коэффициента при базисном векторе $|1\rangle$.

Матрица Φ является унитарной. В самом деле,

$$\Phi^\dagger \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(-i\phi_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\phi_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Из унитарности матрицы оператора вытекает унитарность самого оператора.

Представим кубит в виде (1.5):

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\vartheta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\vartheta}{2}|1\rangle.$$

Оператор $\hat{\Phi}$ меняет фазу коэффициента при базисном векторе $|1\rangle$. На сфере Блоха это соответствует повороту на угол ϕ_0 вокруг оси Z – см. рис.9.

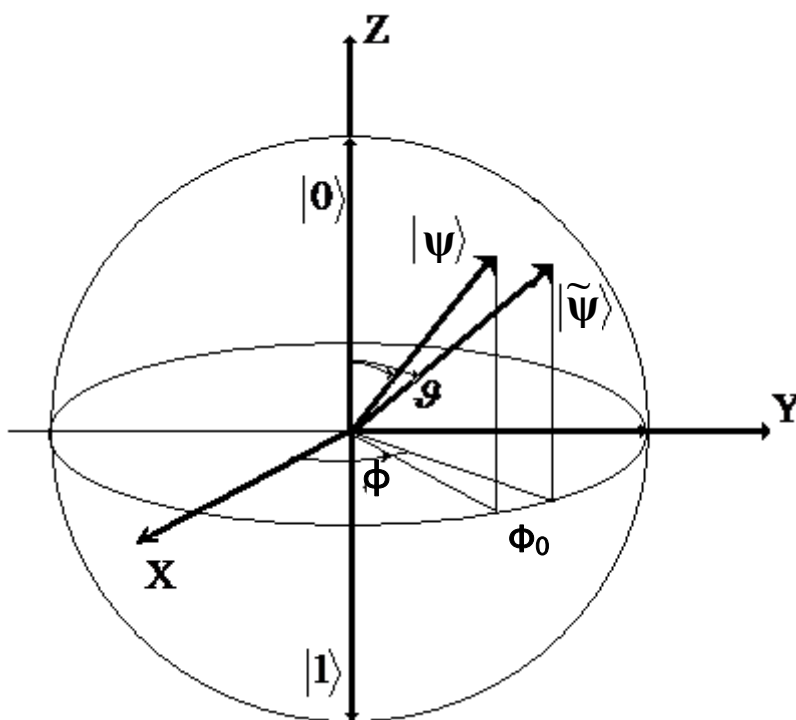


Рис.9. Геометрическое изображение преобразования Φ на сфере Блоха.

Найдем собственные числа λ и собственные вектора $|\psi\rangle_\lambda$ оператора $\hat{\Phi}$:

$$\hat{\Phi}|\psi\rangle_\lambda = \lambda|\psi\rangle_\lambda,$$

или, в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\phi_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_\lambda = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_\lambda.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & \exp(i\phi_0) - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_\lambda = 0.$$

Собственные числа матрицы Φ определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & \exp(i\phi_0) - \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\exp(i\phi_0) - \lambda) = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \exp(i\phi_0).$$

В свою очередь, собственные вектора матрицы Φ определяются согласно одному из двух условий

$$(1-\lambda)\alpha + 0\beta = 0,$$

или

$$0\alpha + (\exp(i\phi_0) - \lambda)\beta = 0.$$

Полагая $\lambda = \lambda_1 = 1$, видим, что первое из уравнений удовлетворяется тождественно. Согласно второму уравнению,

$$\beta = \beta_1 = 0.$$

Полагая $\lambda = \lambda_2 = \exp(i\phi_0)$, видим, что второе из уравнений удовлетворяется тождественно. Согласно первому уравнению,

$$\alpha = \alpha_2 = 0.$$

Выбирая $\alpha_1 = \beta_2 = 1$, получаем.

$$|\Psi\rangle_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\Psi\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, собственные вектора оператора $\hat{\Phi}$ совпадают с базисными векторами.

Глава 3. Двухкубитовые системы

3.1. Двухкубитовые состояния и операторы

Рассмотрим квантовую систему, состоящую из двух кубитов:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \alpha_1 |0_1\rangle + \beta_1 |1_1\rangle, \\ |\psi_2\rangle &= \alpha_2 |0_2\rangle + \beta_2 |1_2\rangle, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $|0_1\rangle, |1_1\rangle, |0_2\rangle, |1_2\rangle$ - базисные состояния первого и второго кубита соответственно, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ - комплексные числа. Как и ранее, в случае однокубитовой системы, вероятность обнаружить m -й кубит ($m=1,2$) в состоянии $|0_m\rangle$ равна $|\alpha_m|^2$, а вероятность обнаружить его в состоянии $|1_m\rangle$ равна $|\beta_m|^2$. Сумма этих вероятностей равна единице:

$$|\alpha_m|^2 + |\beta_m|^2 = 1. \tag{3.2}$$

Наряду с вектором $|\psi_m\rangle$, введем эрмитово-сопряженный вектор $\langle\psi_m| \equiv |\psi_m\rangle^+$. Тогда скалярное произведение двух векторов $|\psi_m\rangle$ и $|\tilde{\psi}_m\rangle$ запишем в виде $\langle\psi_m|\tilde{\psi}_m\rangle$. Будем считать основные состояния $|0_m\rangle$ и $|1_m\rangle$ ортонормированными:

$$\langle 0_m | 0_m \rangle = 1, \quad \langle 1_m | 1_m \rangle = 1, \quad \langle 0_m | 1_m \rangle = 0. \tag{3.3}$$

Тогда из условия нормировки волнового вектора m -го кубита $\langle\psi_m|\psi_m\rangle = 1$ сразу вытекает требование (3.2) на коэффициенты α_m и β_m . Отметим, что кубиты $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ (а также и соответствующие базисные вектора $|0_1\rangle, |1_1\rangle, |0_2\rangle, |1_2\rangle$) относятся к разным векторным пространствам – назовем их H_1 и H_2 :

$$|\psi_1\rangle \in H_1, \quad |\psi_2\rangle \in H_2.$$

Построим векторное пространство, элементами которого являются пары векторов, первый из которых принадлежит пространству H_1 , а второй – пространству H_2 . Такое пространство называется тензорным

произведением пространств H_1 и H_2 . Оно обозначается $H_1 \otimes H_2$. Элементы его обозначим $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. Базисные вектора этого пространства представляют собой тензорные произведения базисных векторов из пространств H_1 и H_2 :

$$\begin{aligned} |00\rangle &= |0_1\rangle \otimes |0_2\rangle, & |01\rangle &= |0_1\rangle \otimes |1_2\rangle, \\ |10\rangle &= |1_1\rangle \otimes |0_2\rangle, & |11\rangle &= |1_1\rangle \otimes |1_2\rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Мы будем говорить, что двухкубитовая система находится в состоянии $|00\rangle$, если ее первый кубит находится в состоянии $|0_1\rangle$, а второй кубит – в состоянии $|0_2\rangle$ и т.д. Сопряженные вектора в тензорном произведении пространств представляют собой тензорное произведение сопряженных векторов из пространств – сомножителей:

$$\langle \psi | = \langle \psi_1 | \otimes \langle \psi_2 |.$$

Скалярное произведение определяется покомпонентно. Пусть

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle, \quad |\tilde{\psi}\rangle = |\tilde{\psi}_1\rangle \otimes |\tilde{\psi}_2\rangle.$$

Тогда скалярное произведение этих векторов в $H_1 \otimes H_2$ определяется как

$$\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle_{H_1 \otimes H_2} = \langle \psi_1 | \tilde{\psi}_1 \rangle_{H_1} \langle \psi_2 | \tilde{\psi}_2 \rangle_{H_2}. \quad (3.5)$$

В соответствии с (3.5), базисные вектора тензорного произведения пространств являются ортонормированными:

$$\langle ij | mn \rangle = \langle i | m \rangle \langle j | n \rangle = \delta_{im} \delta_{jn}.$$

Разложим двухкубитовое состояние по базисным векторам:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = (\alpha_1 |0_1\rangle + \beta_1 |1_1\rangle) \otimes (\alpha_2 |0_2\rangle + \beta_2 |1_2\rangle), \\ |\psi\rangle &= \alpha_1 \alpha_2 |0_1\rangle \otimes |0_2\rangle + \alpha_1 \beta_2 |0_1\rangle \otimes |1_2\rangle + \beta_1 \alpha_2 |1_1\rangle \otimes |0_2\rangle + \beta_1 \beta_2 |1_1\rangle \otimes |1_2\rangle \end{aligned}$$

Окончательно

$$|\psi\rangle = \gamma_{00}|00\rangle + \gamma_{01}|01\rangle + \gamma_{10}|10\rangle + \gamma_{11}|11\rangle, \quad (3.6)$$

где

$$\gamma_{mn} = \langle mn|\psi\rangle.$$

Как и в случае одного кубита, $|\gamma_{mn}|^2$ представляет собой вероятность найти двухкубитовую систему в состоянии $|mn\rangle$. Сумма таких вероятностей должна равняться единице:

$$|\gamma_{00}|^2 + |\gamma_{01}|^2 + |\gamma_{10}|^2 + |\gamma_{11}|^2 = 1. \quad (3.7)$$

Это утверждение также вытекает из нормированности вектора $|\psi\rangle$:

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1.$$

Из (3.7) вытекает, что система двух кубитов описывается вектором единичной длины. В четырехмерном комплексном пространстве коэффициентов конец вектора $|\psi\rangle$ лежит на единичной сфере (3.6). Однако многомерность пространства коэффициентов не позволяют использовать это обстоятельство для наглядного представления состояния двух кубитов, по аналогии со сферой Блоха.

Операторы, определенные в H_1 и H_2 , действуют в тензорном произведении пространств $H_1 \otimes H_2$ покомпонентно:

$$(\hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2)(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = (\hat{U}_1|\psi_1\rangle) \otimes (\hat{U}_2|\psi_2\rangle).$$

3.2 Двухкубитовый квантовый логический элемент CNOT

Важнейшим двухкубитовым оператором является CNOT, или управляемый NOT. Рассмотрим базис тензорного произведения пространств $H_1 \otimes H_2$ (3.4)

$$|mn\rangle = |m\rangle \otimes |n\rangle,$$

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В этом базисе матрица оператора CNOT имеет вид:

$$U_{\text{CN}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Рассмотрим действие этой матрицы на базисные вектора:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{aligned} U_{\text{CN}}|00\rangle &= |00\rangle, & U_{\text{CN}}|01\rangle &= |01\rangle, \\ U_{\text{CN}}|10\rangle &= |11\rangle, & U_{\text{CN}}|11\rangle &= |10\rangle. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Таким образом, если первый кубит находится в состоянии $|0\rangle$, а второй кубит находится в одном из базовых состояний $|0\rangle$ или $|1\rangle$, то под действием оператора CNOT состояние такой двухбитовой системы не изменяется. Если же первый кубит находится в состоянии $|1\rangle$, а второй – в одном из базовых состояний, то оператор CNOT переводит второй кубит в другое базовое состояние. Состояние же первого кубита не изменяется:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{CN}}|0\rangle \otimes |0\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle, & U_{\text{CN}}|0\rangle \otimes |1\rangle &= |0\rangle \otimes |1\rangle, \\
 U_{\text{CN}}|1\rangle \otimes |0\rangle &= |1\rangle \otimes |1\rangle, & U_{\text{CN}}|1\rangle \otimes |1\rangle &= |1\rangle \otimes |0\rangle.
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

Будем изображать оператор CNOT в виде квантовой схемы

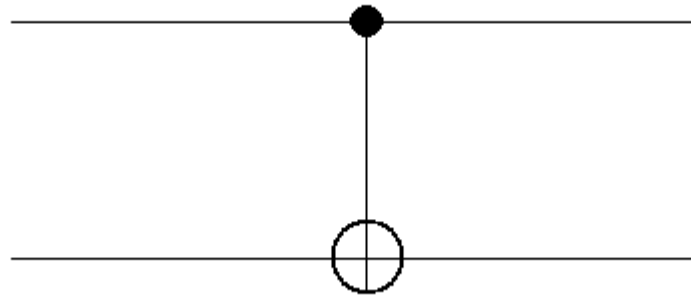


Рис.10.Квантовая схема, изображающая оператор CNOT

По двум проводам, слева направо, к схеме подводятся два кубита. По двум правым проводам, от схемы отводятся два кубита – результат действия схемы. На рис.11 – 14 показано действие схемы на базисные двухкубитовые состояния, в соответствии с (3.10).

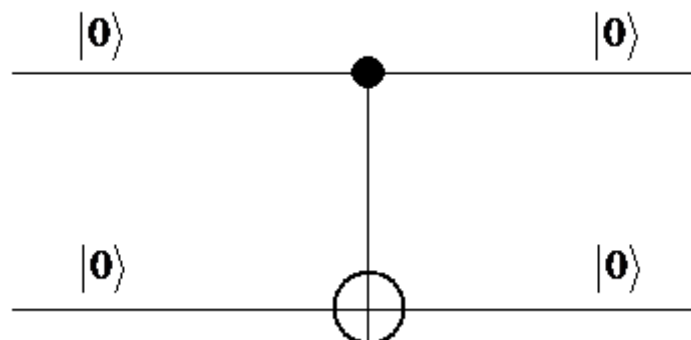


Рис.11.Действие CNOT на базисное состояние $U_{\text{CN}}|0\rangle \otimes |0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$

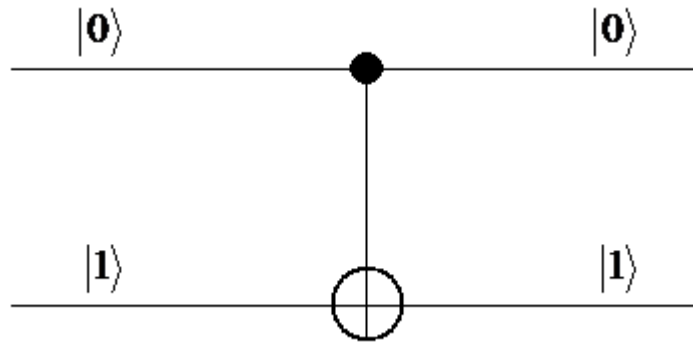


Рис.12. Действие CNOT на базисное состояние $U_{CN} |0\rangle \otimes |1\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$

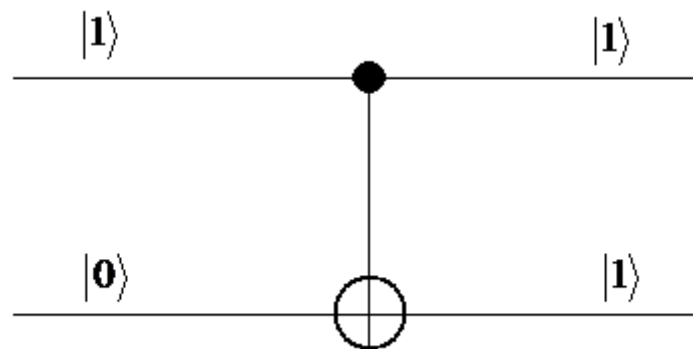


Рис.13. Действие CNOT на базисное состояние $U_{CN} |1\rangle \otimes |0\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$

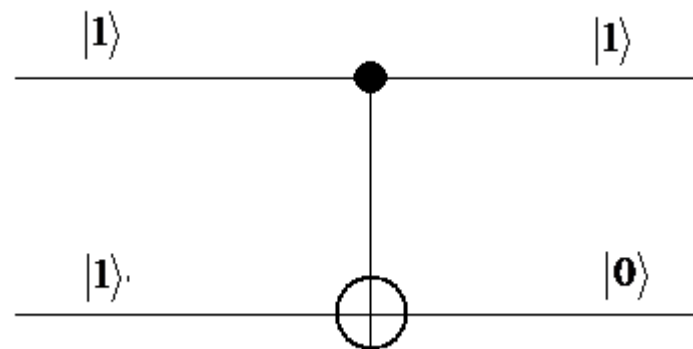


Рис.14. Действие CNOT на базисное состояние $U_{CN} |1\rangle \otimes |1\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle$

Отметим, что действуя на базисное состояние, квантовый оператор ведет себя как классический. Для CNOT классическим прототипом является оператор XOR. На вход классического оператора XOR поступают два бита – управляющий и управляемый. Если управляющий бит находится в состоянии 0, то управляемый бит не изменяется. Если управляющий бит

находится в состоянии 1, то управляемый бит изменяется на противоположный: 0 преобразуется в 1, а 1 в 0. Управляющий бит во всех случаях остается неизменным. Такое преобразование можно представить в виде классической схемы – см. рис.15.

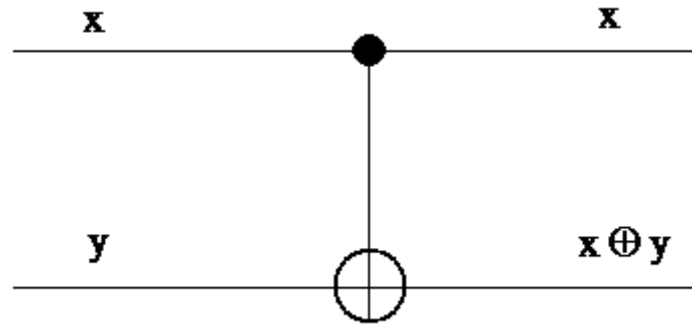


Рис.15.Классический элемент XOR

На вход схемы подаются два бита x и y . На выходе мы получаем неизменный управляющий бит x , управляемый же бит преобразуется в $x \oplus y$ - т.е. в сумму по модулю 2 управляющего и управляемого бита. Эта сумма работает так:

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 0 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0. \quad (3.11)$$

Сравнивая (3.11) с (3.10) видим, что квантовый элемент CNOT действительно является обобщением классического элемента XOR. На базисных векторах CNOT ведет себя так же, как XOR.

Рассмотрим двухкубитовое состояние, в котором первый – управляющий кубит, находится в состоянии $|0_1\rangle$, а второй – управляемый кубит – в произвольном состоянии $\alpha|0_2\rangle + \beta|1_2\rangle$. Вектор, описывающий такое состояние, имеет вид:

$$|\psi\rangle = 1|0_1\rangle \otimes (\alpha|0_2\rangle + \beta|1_2\rangle) = \alpha|0_1\rangle \otimes |0_2\rangle + \beta|0_1\rangle \otimes |1_2\rangle,$$

или

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + 0|10\rangle + 0|11\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Действуя оператором CNOT на такой вектор состояния, получаем

$$|\tilde{\psi}\rangle = U_{\text{CN}}|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|\tilde{\psi}\rangle = |0_1\rangle \otimes (\alpha|0_2\rangle + \beta|1_2\rangle) = |\psi\rangle.$$

Таким образом, если управляющий кубит равен $|0_1\rangle$, то какой бы ни был управляемый кубит, он остается неизменным (вместе с управляемым кубитом) под действием оператора CNOT.

Рассмотрим теперь двухкубитовое состояние, в котором первый – управляющий кубит, находится в состоянии $|1_1\rangle$, а второй – управляемый кубит – в произвольном состоянии $\alpha|0_2\rangle + \beta|1_2\rangle$. Вектор, описывающий такое состояние, имеет вид:

$$|\psi\rangle = 1|1_1\rangle \otimes (\alpha|0_2\rangle + \beta|1_2\rangle) = \alpha|1_1\rangle \otimes |0_2\rangle + \beta|1_1\rangle \otimes |1_2\rangle,$$

или

$$|\psi\rangle = 0|00\rangle + 0|01\rangle + \alpha|10\rangle + \beta|11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Действуя оператором CNOT на такой вектор состояния, получаем

$$|\tilde{\psi}\rangle = U_{\text{CN}}|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix},$$

$$|\tilde{\psi}\rangle = |1_1\rangle \otimes (\beta|0_2\rangle + \alpha|1_2\rangle).$$

Таким образом, если управляющий кубит равен $|1\rangle$, то действие оператора CNOT на управляемый кубит эквивалентно действию оператора NOT. Именно это свойство позволяет называть рассматриваемый оператор управляемым оператором NOT.

3.3 Попытка копирования неизвестного кубита с помощью двухкубитового квантового элемента CNOT

Покажем, что классический элемент CNOT (XOR) можно использовать для копирования неизвестного бита. Для этого подадим на управляющий вход неизвестный бит x , а на управляемый вход подадим 0 . Тогда, в соответствии с рис.15, управляющий бит не изменится, а управляемый преобразуется в $x \oplus 0$. Используя свойства сложения по модулю 2, видим, что

$$x \oplus 0 = x.$$

Следовательно, управляющий бит стал равен копии управляемого бита – см. рис.16.

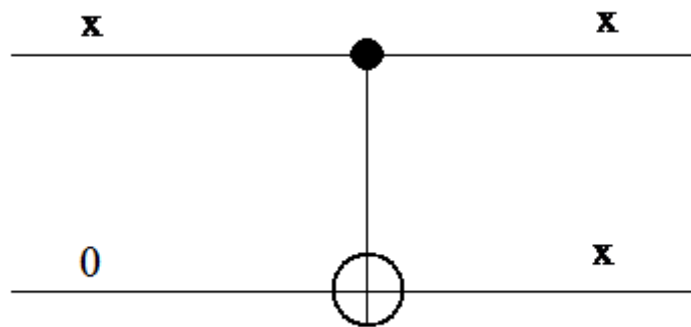


Рис.16. Копирование неизвестного бита с помощью классического элемента CNOT.

Попробуем теперь использовать квантовый оператор CNOT для копирования кубита. Для этого на управляющий вход подадим кубит

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

а на управляемый вход подадим нулевой базисный вектор $|0\rangle$. Рассчитаем входное двухкубитовое состояние:

$$|\psi\rangle = (\alpha|0_1\rangle + \beta|1_1\rangle) \otimes |0_2\rangle,$$

или

$$|\psi\rangle = \alpha|0_1\rangle \otimes |0_2\rangle + \beta|1_1\rangle \otimes |0_2\rangle = \alpha|00\rangle + 0|01\rangle + \beta|10\rangle + 0|11\rangle$$

Таким образом, в базисе (3.4), входной вектор может быть представлен в виде столбца коэффициентов

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда выходной вектор $|\tilde{\psi}\rangle = U_{CN} |\psi\rangle$,

$$|\tilde{\psi}\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Для того, чтобы CNOT копировал кубит, на выходе у него должно было бы быть две копии входного кубита. Тогда двухкубитовое выходное состояние имело бы вид:

$$|\tilde{\tilde{\psi}}\rangle = (\alpha|0_1\rangle + \beta|1_1\rangle) \otimes (\alpha|0_2\rangle + \beta|1_2\rangle),$$

или

$$|\tilde{\tilde{\psi}}\rangle = \alpha^2|0_1\rangle \otimes |0_2\rangle + \alpha\beta|0_1\rangle \otimes |1_2\rangle + \alpha\beta|1_1\rangle \otimes |0_2\rangle + \beta^2|1_1\rangle \otimes |1_2\rangle,$$

$$|\tilde{\tilde{\psi}}\rangle = \alpha^2|00\rangle + \alpha\beta|01\rangle + \alpha\beta|10\rangle + \beta^2|11\rangle.$$

Представим $|\tilde{\psi}\rangle$ в векторной форме

$$|\tilde{\psi}\rangle = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha\beta \\ \alpha\beta \\ \beta^2 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Приравнивая (3.12) и (3.13), получаем условия копирования кубита в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha^2 = \alpha \\ \alpha\beta = 0 \\ \beta^2 = \beta \end{cases}. \quad (3.14)$$

У системы (3.14) есть три возможных решения –

$$\begin{aligned} 1) \quad & \alpha = 0, \quad \beta = 0, \\ 2) \quad & \alpha = 1, \quad \beta = 0, \\ 3) \quad & \alpha = 0, \quad \beta = 1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Таким образом, копирование кубита общего вида с помощью оператора CNOT невозможно. Полученные случаи (3.15), в которых копирование возможно, соответствуют классическим состояниям.

Невозможность копирования (как говорят, клонирования) неизвестного кубита доказана для произвольного унитарного оператора. Как уже отмечалось выше, многократное копирование кубита (если бы оно было возможно) позволило бы извлечь из одного кубита сколь угодно много информации с помощью многократных измерений состояния копий исходного кубита.

Глава 4. Квантовые схемы

4.1 Однокубитовые квантовые схемы

Рассмотрим два последовательно включенных однокубитовых квантовых логических элемента. На вход первого элемента поступает кубит, описываемый волновым вектором $|\psi\rangle$. Действие первого элемента на кубит описывается оператором \hat{U}_1 . Результатом действия оператора \hat{U}_1 на вектор $|\psi\rangle$ является волновой вектор $|\psi_1\rangle$ - см. рис.17.

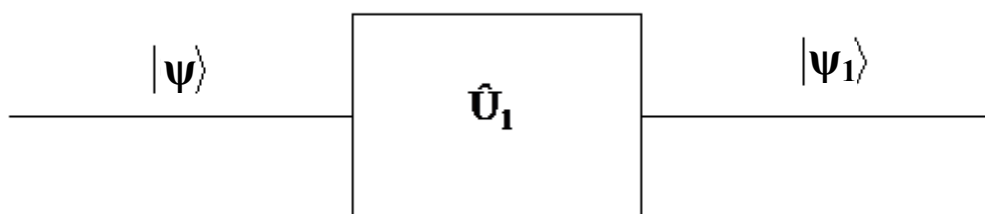


Рис.17. Действие квантового логического элемента \hat{U}_1 .

Рассмотрим теперь второй однокубитовый квантовый логический элемент \hat{U}_2 . На его вход поступает волновой вектор $|\psi_1\rangle$ - результат действия логического элемента \hat{U}_1 . На выходе логического элемента \hat{U}_2 появляется волновой вектор $|\psi_2\rangle$ - см. рис.18.

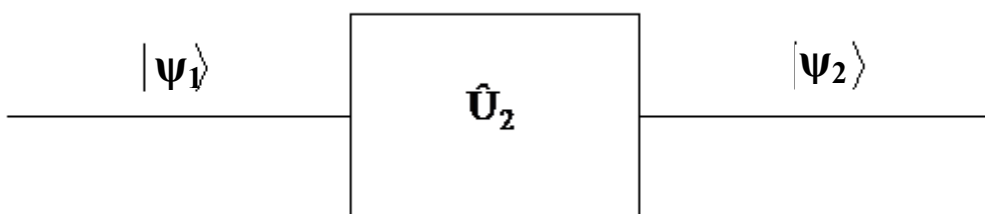


Рис.18. Действие квантового логического элемента \hat{U}_2 .

Последовательное действие операторов \hat{U}_1 и \hat{U}_2 представляется квантовой схемой, изображенной на рис.19.

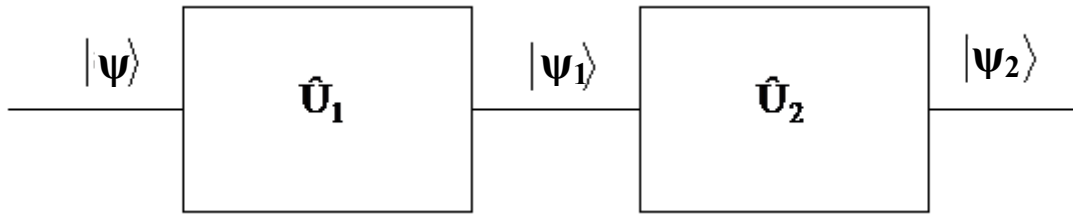


Рис.19. Последовательное действие квантового логического элемента \hat{U}_1 и квантового логического элемента \hat{U}_2 .

Таким образом, преобразование начального вектора $|\psi\rangle$ в конечный вектор $|\psi_2\rangle$ за счет последовательного действия операторов \hat{U}_1 и \hat{U}_2 можно записать следующим образом:

$$|\psi_2\rangle = \hat{U}_2|\psi_1\rangle = \hat{U}_2\hat{U}_1|\psi\rangle. \quad (4.1)$$

В матричном представлении, квантовая схема, изображенная на рис.19 описывается матрицей U равной произведению матриц U_1 и U_2 :

$$U = U_2U_1. \quad (4.2)$$

Произведение унитарных матриц унитарно. Поэтому последовательное действие двух унитарных преобразований является унитарным преобразованием.

Описанный алгоритм конструирования однокубитовых квантовых логических схем обобщается на общий случай последовательного действия n логических элементов. На рис.20 изображена цепочка из n последовательно включенных логических элементов $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n$.

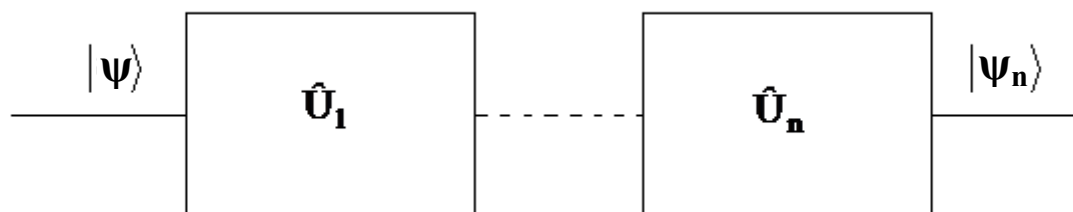


Рис.20. Последовательное действие квантовых логических элементов $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n$.

На вход цепочки поступает волновой вектор $|\psi\rangle$, на выходе появляется волновой вектор $|\psi_n\rangle$. Преобразование начального вектора $|\psi\rangle$ в конечный вектор $|\psi_n\rangle$ за счет последовательного действия операторов $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n$ можно записать следующим образом

$$|\psi_n\rangle = \hat{U}_n |\psi_{n-1}\rangle = \dots = \hat{U}_n \hat{U}_{n-1} \dots \hat{U}_1 |\psi\rangle. \quad (4.3)$$

В матричном представлении, квантовая схема, изображенная на рис.20 описывается матрицей U равной произведению матриц $\hat{U}_n \hat{U}_{n-1} \dots \hat{U}_1$:

$$U = U_n U_{n-1} \dots U_1. \quad (4.4)$$

Произведение унитарных матриц унитарно. Поэтому последовательное действие n унитарных преобразований является унитарным преобразованием.

4.2 Однокубитовые квантовые схемы, построенные из одинаковых элементов

Рассмотрим простейший случай последовательного действия одинаковых вещественных симметричных квантовых элементов. Матрицы, описывающие такие элементы, симметричны и имеют вещественные коэффициенты. Примером таких элементов являются логические элементы NOT (X), Z и элемент Адамара H.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Как и любые матрицы, описывающие квантовые логические элементы, матрицы (4.5) – (4.7) унитарны, т.е.

$$U^+U = I. \quad (4.8)$$

Вещественные симметричные матрицы обладают дополнительным свойством

$$U^+ = U. \quad (4.9)$$

Из (4.8) и (4.9) вытекает равенство

$$UU = I. \quad (4.10)$$

Таким образом, последовательное действие двух одинаковых вещественных симметричных квантовых элементов эквивалентно единичному оператору. Следовательно, последовательное действие четного числа вещественных симметричных квантовых элементов, также эквивалентно единичному оператору:

$$\underbrace{U \ U \ \dots \ U}_{2n} = I. \quad (4.11)$$

Последовательное действие нечетного числа вещественных симметричных квантовых элементов U , эквивалентно действию одного элемента U :

$$\underbrace{U \ U \ \dots \ U}_{2n+1} = U. \quad (4.12)$$

Рассмотрим теперь случай последовательного действия одинаковых комплексных квантовых элементов.

Логический квантовый элемент Y

Элемент Y задается матрицей

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Специфика этого комплексного логического элемента в том, что (как и у симметричных вещественных элементов), квадрат этого элемента равен единице:

$$Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = I. \quad (4.14)$$

Логический квантовый элемент S

Элемент S задается матрицей

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Особенность этого комплексного логического элемента в том, квадрат этого элемента равен квантовому логическому элементу Z:

$$S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Z. \quad (4.16)$$

Возможность выразить один квантовый логический элемент через другие, позволяет поставить вопрос о минимальном наборе элементов, через которые можно выразить все остальные. В частности, уже сейчас видно, что в этот минимальный набор можно включить S, но не включать Z.

Логический квантовый элемент $\frac{\pi}{8}$

Рассмотрим еще один комплексный логический элемент T, который часто обозначается $\frac{\pi}{8}$.

Элемент T задается матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\pi}{8}\right) \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Поскольку этот элемент осуществляет поворот вокруг оси Z (на сфере Блоха) на угол $\frac{\pi}{8}$, естественно предположить, что четвертая степень этого элемента осуществляет поворот на угол $\frac{\pi}{2}$. В самом деле,

$$T^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\pi}{8}\right) \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = S. \quad (4.18)$$

Таким образом, четвертая степень элемента T совпадает с элементом S . Напомним, что квадрат элемента S совпадает с элементом Z . Таким образом, при построении минимального набора элементов, в него можно включить T , но не включать S и Z .

Логический элемент Φ .

Элемент Φ задается матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\Phi) \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Этот элемент осуществляет поворот вокруг оси Z (на сфере Блоха) на угол Φ . Частными случаями этого элемента являются T (поворот на угол $\frac{\pi}{8}$ на сфере Блоха), элемент S (поворот на угол $\frac{\pi}{2}$) и элемент Z (поворот на угол $\frac{\pi}{2}$). Для углов поворота $\Phi = 2\pi\frac{m}{n}$, n -я степень этого оператора совпадает с единичным оператором.

4.3 Однокубитовые квантовые схемы, построенные из разных элементов

На множестве элементов X, Y, Z, H выполняются следующие тождества:

$$HXH = Z, \quad (4.20)$$

$$HYH = -Y, \quad (4.21)$$

$$HZH = X. \quad (4.22)$$

В самом деле:

$$HXH = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Z,$$

$$HYH = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -Y,$$

$$HZH = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = X.$$

4.4 Двухкубитовые квантовые схемы

Рассмотрим квантовую систему, состоящую из двух кубитов:

$$|\psi_1\rangle = \alpha_1 |0_1\rangle + \beta_1 |1_1\rangle, \quad (4.23)$$

$$|\psi_2\rangle = \alpha_2 |0_2\rangle + \beta_2 |1_2\rangle,$$

где $|0_1\rangle, |1_1\rangle, |0_2\rangle, |1_2\rangle$ - базисные состояния первого и второго кубита соответственно, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ - комплексные числа.

Отметим, что кубиты $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ (а также и соответствующие базисные вектора $|0_1\rangle, |1_1\rangle, |0_2\rangle, |1_2\rangle$) относятся к разным векторным пространствам – назовем их H_1 и H_2 :

$$|\psi_1\rangle \in H_1, \quad |\psi_2\rangle \in H_2.$$

Построим векторное пространство, элементами которого являются пары векторов, первый из которых принадлежит пространству H_1 , а второй – пространству H_2 . Такое пространство называется тензорным произведением пространств H_1 и H_2 . Оно обозначается $H_1 \otimes H_2$. Элементы его обозначим $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. Базисные вектора этого пространства представляют собой тензорные произведения базисных векторов из пространств H_1 и H_2 :

$$\begin{aligned} |00\rangle &= |0_1\rangle \otimes |0_2\rangle, & |01\rangle &= |0_1\rangle \otimes |1_2\rangle, \\ |10\rangle &= |1_1\rangle \otimes |0_2\rangle, & |11\rangle &= |1_1\rangle \otimes |1_2\rangle. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Операторы, определенные в H_1 и H_2 , действуют в тензорном произведении пространств $H_1 \otimes H_2$ покомпонентно:

$$(\hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2)(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = (\hat{U}_1|\psi_1\rangle) \otimes (\hat{U}_2|\psi_2\rangle). \tag{4.25}$$

В базисах пространств H_1 и H_2 , вектора $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ представляются в виде столбцов

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \tag{4.26}$$

а операторы $\hat{U}^{(1)}$ и $\hat{U}^{(2)}$, действующие в пространствах H_1 и H_2 соответственно – в виде матриц

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= \begin{pmatrix} U_{00}^{(1)} & U_{01}^{(1)} \\ U_{10}^{(1)} & U_{11}^{(1)} \end{pmatrix}, \\ U^{(2)} &= \begin{pmatrix} U_{00}^{(2)} & U_{01}^{(2)} \\ U_{10}^{(2)} & U_{11}^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Для того, чтобы представить волновые векторы и оператора тензорного произведения пространств $H_1 \otimes H_2$ в базисе (4.24), введем понятие тензорного (Кронекерова) произведения матриц.

Пусть A – матрица $m \times n$, B – матрица $r \times s$. Произведение Кронекера матриц A и B определяется как матрица $(m \cdot r) \times (n \cdot s)$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \dots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \dots & A_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \dots & A_{mn}B \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Представим базисные вектора пространств H_1 и H_2 в виде:

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & |1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \\ \\ |00\rangle &= |0_1\rangle \otimes |0_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \\ |01\rangle &= |0_1\rangle \otimes |1_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \\ |10\rangle &= |1_1\rangle \otimes |0_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \\ |11\rangle &= |1_1\rangle \otimes |1_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Запишем теперь двухкубитовое состояние $|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \\ \beta_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \\ \alpha_1 \beta_2 \\ \beta_1 \alpha_2 \\ \beta_1 \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Наконец, тензорное (Кронекерово) произведение матричных представлений операторов $\hat{U}^{(1)}$ и $\hat{U}^{(2)}$ имеет вид:

$$U = U^{(1)} \otimes U^{(2)} = \begin{pmatrix} U_{00}^{(1)} \begin{pmatrix} U_{00}^{(2)} & U_{01}^{(2)} \\ U_{10}^{(2)} & U_{11}^{(2)} \end{pmatrix} & U_{01}^{(1)} \begin{pmatrix} U_{00}^{(2)} & U_{01}^{(2)} \\ U_{10}^{(2)} & U_{11}^{(2)} \end{pmatrix} \\ U_{10}^{(1)} \begin{pmatrix} U_{00}^{(2)} & U_{01}^{(2)} \\ U_{10}^{(2)} & U_{11}^{(2)} \end{pmatrix} & U_{11}^{(1)} \begin{pmatrix} U_{00}^{(2)} & U_{01}^{(2)} \\ U_{10}^{(2)} & U_{11}^{(2)} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

или

$$U = U^{(1)} \otimes U^{(2)} = \begin{pmatrix} U_{00}^{(1)}U_{00}^{(2)} & U_{00}^{(1)}U_{01}^{(2)} & U_{01}^{(1)}U_{00}^{(2)} & U_{01}^{(1)}U_{01}^{(2)} \\ U_{00}^{(1)}U_{10}^{(2)} & U_{00}^{(1)}U_{11}^{(2)} & U_{01}^{(1)}U_{10}^{(2)} & U_{01}^{(1)}U_{11}^{(2)} \\ U_{10}^{(1)}U_{00}^{(2)} & U_{10}^{(1)}U_{01}^{(2)} & U_{11}^{(1)}U_{00}^{(2)} & U_{11}^{(1)}U_{01}^{(2)} \\ U_{10}^{(1)}U_{10}^{(2)} & U_{10}^{(1)}U_{11}^{(2)} & U_{11}^{(1)}U_{10}^{(2)} & U_{11}^{(1)}U_{11}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Как и ранее, в случае однокубитовой системы, вероятность обнаружить m -й кубит ($m=1,2$) в состоянии $|0_m\rangle$ равна $|\alpha_m|^2$, а вероятность обнаружить его в состоянии $|1_m\rangle$ равна $|\beta_m|^2$. Сумма этих вероятностей равна единице:

$$|\alpha_m|^2 + |\beta_m|^2 = 1. \quad (4.31)$$

Наряду с вектором $|\psi_m\rangle$, введем эрмитово-сопряженный вектор $\langle\psi_m| \equiv |\psi_m\rangle^+$. Тогда скалярное произведение двух векторов $|\psi_m\rangle$ и $|\tilde{\psi}_m\rangle$ запишем в виде $\langle\psi_m|\tilde{\psi}_m\rangle$. Будем считать основные состояния $|0_m\rangle$ и $|1_m\rangle$ ортонормированными:

$$\langle 0_m | 0_m \rangle = 1, \quad \langle 1_m | 1_m \rangle = 1, \quad \langle 0_m | 1_m \rangle = 0. \quad (4.32)$$

Тогда из условия нормировки волнового вектора m -го кубита $\langle \psi_m | \psi_m \rangle = 1$ сразу вытекает требование (4.31) на коэффициенты α_m и β_m .

Мы будем говорить, что двухкубитовая система находится в состоянии $|00\rangle$, если ее первый кубит находится в состоянии $|0_1\rangle$, а второй кубит – в состоянии $|0_2\rangle$ и т.д. Сопряженные вектора в тензорном произведении пространств представляют собой тензорное произведение сопряженных векторов из пространств – сомножителей:

$$\langle \psi | = \langle \psi_1 | \otimes \langle \psi_2 |.$$

Скалярное произведение определяется покомпонентно. Пусть

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle, \quad |\tilde{\psi}\rangle = |\tilde{\psi}_1\rangle \otimes |\tilde{\psi}_2\rangle.$$

Тогда скалярное произведение этих векторов в $H_1 \otimes H_2$ определяется как:

$$\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle_{H_1 \otimes H_2} = \langle \psi_1 | \tilde{\psi}_1 \rangle_{H_1} \langle \psi_2 | \tilde{\psi}_2 \rangle_{H_2}. \quad (4.33)$$

В соответствии с (4.33), базисные вектора тензорного произведения пространств являются ортонормированными:

$$\langle ij | mn \rangle = \langle i | m \rangle \langle j | n \rangle = \delta_{im} \delta_{jn}.$$

Разложим двухкубитовое состояние по базисным векторам:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = (\alpha_1 |0_1\rangle + \beta_1 |1_1\rangle) \otimes (\alpha_2 |0_2\rangle + \beta_2 |1_2\rangle),$$

$$|\psi\rangle = \alpha_1 \alpha_2 |0_1\rangle \otimes |0_2\rangle + \alpha_1 \beta_2 |0_1\rangle \otimes |1_2\rangle + \beta_1 \alpha_2 |1_1\rangle \otimes |0_2\rangle + \beta_1 \beta_2 |1_1\rangle \otimes |1_2\rangle$$

Окончательно

$$|\psi\rangle = \gamma_{00} |00\rangle + \gamma_{01} |01\rangle + \gamma_{10} |10\rangle + \gamma_{11} |11\rangle, \quad (4.34)$$

где

$$\gamma_{mn} = \langle mn | \psi \rangle.$$

Как и в случае одного кубита, $|\gamma_{mn}|^2$ представляет собой вероятность найти двухкубитовую систему в состоянии $|mn\rangle$. Сумма таких вероятностей должна равняться единице:

$$|\gamma_{00}|^2 + |\gamma_{01}|^2 + |\gamma_{10}|^2 + |\gamma_{11}|^2 = 1. \quad (4.35)$$

Это утверждение также вытекает из нормированности вектора $|\psi\rangle$

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1.$$

Из (4.35) вытекает, что система двух кубитов описывается вектором единичной длины. В четырехмерном комплексном пространстве коэффициентов конец вектора $|\psi\rangle$ лежит на единичной сфере (4.35). Однако многомерность пространства коэффициентов не позволяют использовать это обстоятельство для наглядного представления состояния двух кубитов, по аналогии со сферой Блоха.

4.5 Квантовая схема, создающая состояние Белла

Состояния Белла, или ЭПР состояния, названные так в честь Эйнштейна, Подольского и Розена, которые первыми указали на необычные свойства этих состояний [15]. Таких состояний четыре:

$$\begin{aligned} |\beta_{00}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), & |\beta_{01}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \\ |\beta_{10}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), & |\beta_{11}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Для получения состояний Белла можно использовать квантовую схему, приведенную на рис.21.

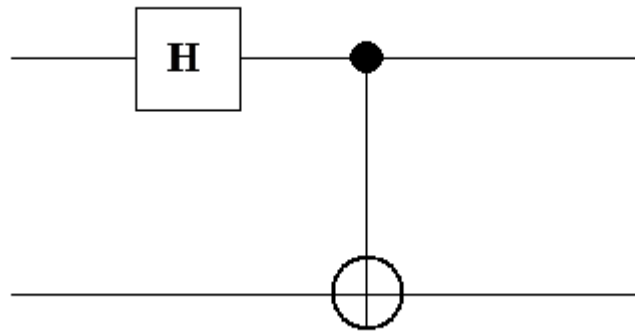


Рис.21. Квантовая схема, создающая состояние Белла

Схема состоит из квантового логического элемента CNOT, в управляющий вход которого включен элемент Адамара H . Оператор, описывающий эту квантовую схему, имеет вид:

$$L = (I \otimes H) \cdot \text{CNOT} . \quad (4.37)$$

Рассмотрим действие этой схемы, когда на ее вход подаются базисные элементы.

1. Пусть на оба входа схемы подаются нулевые базисные вектора $|0\rangle$. Найдем состояние вектора после прохождения элемента Адамара:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

или

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle).$$

Мы получили вектор, поступающий на управляющий вход элемента CNOT. На управляемый вход элемента CNOT поступает базовый вектор $|0\rangle$. Таким образом, на вход элемента CNOT поступает вектор $|\psi\rangle$, равный

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \otimes |0\rangle,$$

или

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассчитаем действие оператора CNOT на такой входной вектор:

$$|\tilde{\psi}\rangle = U_{\text{CN}}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$|\beta_{00}\rangle = L|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \quad (4.38)$$

2. Пусть на управляющий вход схемы подается нулевой базисный вектора $|0\rangle$, а на управляемый вход схемы – базисный вектор $|1\rangle$.

Найдем состояние вектора после прохождения элемента Адамара:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

или

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle).$$

Мы получили вектор, поступающий на управляющий вход элемента CNOT. На управляемый вход элемента CNOT поступает базовый вектор $|1\rangle$. Таким образом, на вход элемента CNOT поступает вектор $|\psi\rangle$, равный

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \otimes |1\rangle,$$

или

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассчитаем действие оператора CNOT на такой входной вектор:

$$|\tilde{\psi}\rangle = U_{\text{CN}}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$|\beta_{01}\rangle = L|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle). \quad (4.39)$$

3. Пусть на управляющий вход схемы подается вектор $|1\rangle$, а на управляемый вход - базисный вектор $|0\rangle$. Найдем состояние вектора $|1\rangle$ после прохождения элемента Адамара:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

или

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).$$

Мы получили вектор, поступающий на управляющий вход элемента CNOT. На управляемый вход элемента CNOT поступает базисный вектор $|0\rangle$. Таким образом, на вход элемента CNOT поступает вектор $|\psi\rangle$, равный

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \otimes |0\rangle,$$

или

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассчитаем действие оператора CNOT на такой входной вектор:

$$|\tilde{\psi}\rangle = U_{\text{CN}}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$|\beta_{10}\rangle = L|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle). \quad (4.40)$$

4. Пусть на управляющий вход схемы подается нулевой базисный вектор $|1\rangle$, а на управляемый вход схемы – также базисный вектор $|1\rangle$.

Найдем состояние вектора $|1\rangle$ после прохождения элемента Адамара:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

или

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).$$

Мы получили вектор, поступающий на управляющий вход элемента CNOT. На управляемый вход элемента CNOT поступает базовый вектор $|1\rangle$. Таким образом, на вход элемента CNOT поступает вектор $|\psi\rangle$, равный

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes |1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \otimes |1\rangle,$$

или

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Рассчитаем действие оператора CNOT на такой входной вектор:

$$|\tilde{\psi}\rangle = U_{\text{CN}}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$|\beta_{11}\rangle = L|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (4.41)$$

Все четыре случая (4.38) – (4.41) можно коротко записать в виде:

$$|\beta_{ab}\rangle = L|ab\rangle \equiv (I \otimes H) \cdot \text{CNOT}|ab\rangle, \quad a, b=0, 1. \quad (4.42)$$

Глава 5. Прикладные аспекты квантовой информатики

5.1 Алгоритм распознавания функций (алгоритм Дойча)

Рассмотрим множество, состоящее из двух базисных векторов $|0\rangle$ и $|1\rangle$ и все возможные функции, отображающие это множество в себя. Таких функций существует четыре. Две функции f_1 и f_2 , называемые постоянными, принимают одно и то же значение при любых значениях аргумента:

$$f_1|0\rangle = |0\rangle, f_1|1\rangle = |0\rangle, \text{ или } f_1|x\rangle = |0\rangle, x = 0, 1,$$

$$f_2|0\rangle = |1\rangle, f_2|1\rangle = |1\rangle, \text{ или } f_2|x\rangle = |1\rangle, x = 0, 1.$$

Назовем сбалансированными две другие функции f_3 и f_4 , определяемые равенствами

$$f_3|x\rangle = |x\rangle, f_4|x\rangle = \text{NOT}|x\rangle, x = 0, 1.$$

Легко видеть, что перечисленные функции исчерпывают все возможные отображения $f: \{|0\rangle, |1\rangle\} \rightarrow \{|0\rangle, |1\rangle\}$. Требуется узнать, к какому из двух классов принадлежит неизвестная функция f . В классическом компьютере для этого требуется две операции - нужно рассчитать $f|0\rangle$ и $f|1\rangle$. В квантовом компьютере достаточно одной операции. В случае 2^m значений аргумента классическому компьютеру нужно 2^m операций, квантовому - m операций. Соответствующий квантовый алгоритм называется алгоритмом Дойча.

Для реализации этого алгоритма построим двухкубитовый унитарный линейный оператор U_f , действующий на базисные элементы $|0\rangle$ и $|1\rangle$ по правилу:

$$U_f(|x\rangle \otimes |y\rangle) = |x\rangle \otimes (|y\rangle \oplus f|x\rangle),$$

где знаком \oplus обозначено сложение по модулю 2. Посмотрим, как этот оператор выглядит для разных функций f .

1) Учитывая, что $f_1|x\rangle = |0\rangle$ и обозначая $U_1 \equiv U_{f_1}$, получаем

$$U_1(|x\rangle \otimes |y\rangle) = |x\rangle \otimes (|y\rangle \oplus f_1|x\rangle) = |x\rangle \otimes (|y\rangle \oplus |0\rangle) = |x\rangle \otimes |y\rangle.$$

Это означает, что U_1 является единичным оператором:

$$U_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

2) Аналогично, для оператора U_2 имеем:

$$U_2(|x\rangle \otimes |y\rangle) = |x\rangle \otimes (|y\rangle \oplus f_2|x\rangle) = |x\rangle \otimes (|y\rangle \oplus |1\rangle) = |x\rangle \otimes \text{NOT}|y\rangle$$

Используя определение тензорного произведения операторов (4.30), получаем:

$$U_2(|x\rangle \otimes |y\rangle) = (I \otimes \text{NOT})(|x\rangle \otimes |y\rangle),$$

$$U_2 = I \otimes \text{NOT} = \begin{pmatrix} \text{NOT} & 0 \\ 0 & \text{NOT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

3) Для оператора U_3 получаем:

$$U_3(|x\rangle \otimes |y\rangle) = |x\rangle \otimes (|y\rangle \oplus f_3|x\rangle) = |x\rangle \otimes (|y\rangle \oplus |x\rangle). \quad (5.3)$$

Сравнивая (5.3) с определением оператора CNOT видим, что

$$U_3 = \text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

4) Наконец, для оператора U_4 получаем

$$U_4(|x\rangle \otimes |y\rangle) = |x\rangle \otimes (|y\rangle \oplus f_4|x\rangle) = |x\rangle \otimes (|y\rangle \oplus \text{NOT}|x\rangle). \quad (5.5)$$

Сравнивая (5.5) с (5.3), (5.4) видим, что

$$U_4 = \text{CNOT} \cdot (\text{NOT} \otimes I).$$

С другой стороны,

$$\text{NOT} \otimes I = \begin{pmatrix} 0 \cdot I & 1 \cdot I \\ 1 \cdot I & 0 \cdot I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Окончательно

$$U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Рассмотрим теперь квантовую схему, реализующую алгоритм Дойча – см. рис.22.

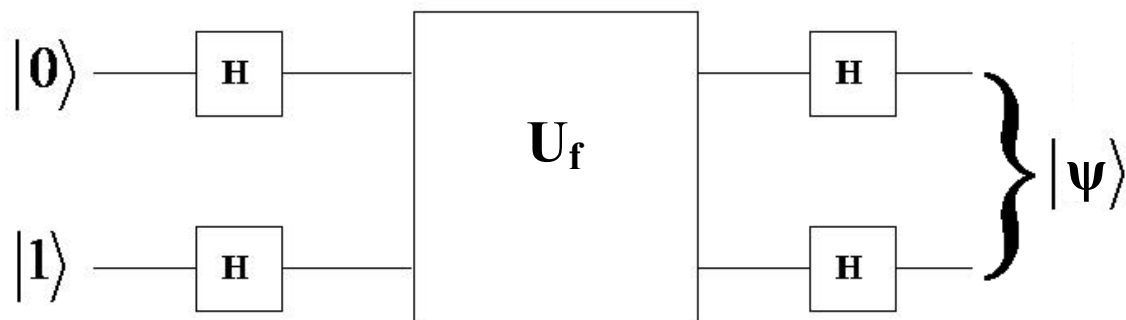


Рис.22. Квантовая схема, реализующая алгоритм Дойча

Распознавание функции f заменяется на распознавание оператора U_f . На вход схемы всегда подается двухкубитовое состояние

$$|0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эта волновая функция обрабатывается оператором $H \otimes H$,

$$H \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате получается состояние

$$|\chi\rangle = (H \otimes H)(|0\rangle \otimes |1\rangle) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

которое и поступает на вход неизвестного логического оператора U_f , а затем на вход оператора $H \otimes H$. Следовательно, сигнал на выходе схемы имеет вид $(H \otimes H) \cdot U_f \cdot |\chi\rangle$.

Рассмотрим четыре случая:

1) $U_1 = I$.

$$|\psi_1\rangle = (H \otimes H) \cdot |\chi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |0\rangle \otimes |1\rangle. \quad (5.7)$$

Этот же результат можно получить проще. Работа схемы в общем виде описывается оператором $L_f = (H \otimes H) \cdot U_f \cdot (H \otimes H)$, который в данном случае сводится к единичному оператору:

$$L_1 = (H \otimes H) \cdot (I \otimes I) \cdot (H \otimes H) = (H \cdot H) \otimes (H \cdot H) = (I \otimes I).$$

Следовательно, $|\psi_1\rangle = L_1 |0\rangle \otimes |1\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$.

2) $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $U_2 |\chi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -|\chi\rangle$.

Используя (5.7), получаем

$$|\psi_2\rangle = -(\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}) \cdot w = -|0\rangle \otimes |1\rangle. \quad (5.8)$$

3) $U_3 = \text{CNOT}$.

$$|\psi_3\rangle = (\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}) \cdot \text{CNOT} \cdot (\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}) |\chi\rangle$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle \otimes |1\rangle. \quad (5.9)$$

4) $U_4 = \text{CNOT} \cdot (\text{NOT} \otimes \mathbb{I})$. Используя (5.6), получаем

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle \otimes |1\rangle. \quad (5.10)$$

Итак, первый канал выходного сигнала для первых двух случаев, т.е. для постоянных функций, содержит $|1\rangle$. Для второй пары случаев (для сбалансированных функций) первый канал выходного сигнала содержит $|0\rangle$. во втором канале выходного сигнала во всех четырех случаях находится $|1\rangle$.

5.2 Сверхплотное кодирование

Идея метода состоит в передаче одного кубита для кодирования двух классических битов. Алиса и Боб приготавливают несколько экземпляров состояний Белла $|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \equiv \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle}{\sqrt{2}}$. Боб забирает по одному кубиту из каждой пары. Алиса кодирует каждую пару

последовательных битов ab оператором L_{ab} и действует этим оператором на свой кубит пары.

Паре кубитов 00 она сопоставляет единичный оператор $L_{00} = I$,

$$\text{паре } 01 \text{ – оператор } L_{01} = X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{паре } 10 \text{ – оператор } L_{10} = Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{паре } 11 \text{ – оператор } L_{11} = iY = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Алиса может влиять только на свой кубит пары, поэтому действие ее на всю пару описывается оператором $L_{ab} \otimes I$.

Учитывая свойства операторов L_{ab} :

$$\begin{aligned} L_{00}|0\rangle &= |0\rangle, & L_{00}|1\rangle &= |1\rangle, \\ L_{01}|0\rangle &= |1\rangle, & L_{01}|1\rangle &= |0\rangle, \\ L_{10}|0\rangle &= |0\rangle, & L_{10}|1\rangle &= -|1\rangle, \\ L_{11}|0\rangle &= -|1\rangle, & L_{11}|1\rangle &= |0\rangle, \end{aligned}$$

ВИДИМ, ЧТО

$$\begin{aligned} (L_{00} \otimes I)|\beta_{00}\rangle &= (I \otimes I) \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle}{\sqrt{2}}, \\ (L_{00} \otimes I)|\beta_{00}\rangle &= |\beta_{00}\rangle, \\ (L_{01} \otimes I)|\beta_{00}\rangle &= (L_{01} \otimes I) \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|1\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle}{\sqrt{2}}, \\ (L_{01} \otimes I)|\beta_{00}\rangle &= |\beta_{01}\rangle, \\ (L_{10} \otimes I)|\beta_{00}\rangle &= (L_{10} \otimes I) \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle}{\sqrt{2}}, \\ (L_{10} \otimes I)|\beta_{00}\rangle &= |\beta_{10}\rangle, \\ (L_{11} \otimes I)|\beta_{00}\rangle &= (L_{11} \otimes I) \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{-|1\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle}{\sqrt{2}}, \\ (L_{11} \otimes I)|\beta_{00}\rangle &= |\beta_{11}\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом $(L_{ab} \otimes I)|\beta_{00}\rangle = |\beta_{ab}\rangle$. После кодирования, Алиса пересылает свой кубит Бобу. Если Алиса хотела переслать Бобу последовательность кубитов ab , то у Боба оказывается перепутанная пара кубитов в состоянии Белла $|\beta_{ab}\rangle$. Теперь этот сигнал следует декодировать.

Напомним, что состояние Белла можно получать с помощью квантовой схемы, изображенной на рис.23:

$$|\beta_{ab}\rangle = (I \otimes H) \cdot \text{CNOT}|ab\rangle, \quad a, b=0, 1.$$

Для декодирования необходимо сконструировать схему, осуществляющую обратную операцию

$$|ab\rangle \equiv |a\rangle \otimes |b\rangle = ((I \otimes H) \cdot \text{CNOT})^{-1} |\beta_{ab}\rangle.$$

Используя свойства унитарных операторов, получаем

$$((I \otimes H) \cdot \text{CNOT})^{-1} = ((I \otimes H) \cdot \text{CNOT})^+ = (I \otimes H)^+ \text{CNOT}^+.$$

Окончательно

$$((I \otimes H) \cdot \text{CNOT})^{-1} = (I \otimes H) \cdot \text{CNOT}. \quad (5.11)$$

Оператору (5.11) соответствует декодирующая схема

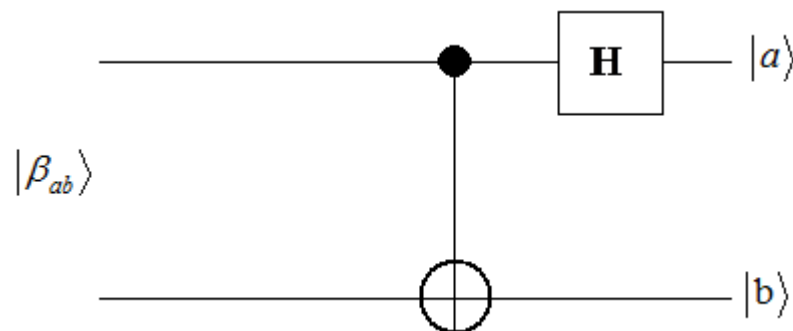


Рис.23. Декодирующая схема метода сверхплотного кодирования

5.3 Квантовая телепортация

Будем понимать под квантовой телепортацией перенос неизвестного квантового состояния с одной системы на другую с использованием квантового канала связи. Рассмотрим одну из возможных схем квантовой телепортации.

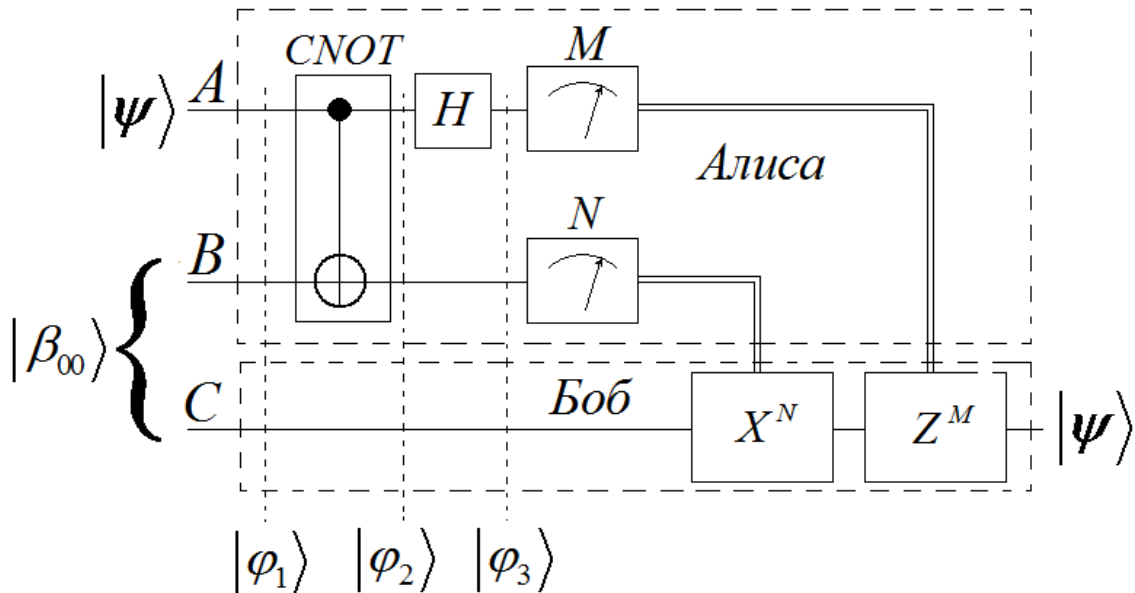


Рис.24.Схема квантовой телепортации. Одинарные линии изображают квантовые каналы связи, двойные - классические

Алиса хочет передать Бобу неизвестное квантовое состояние $|\psi\rangle = \alpha|0^A\rangle + \beta|1^A\rangle$. Алиса и Боб готовят состояние Белла $|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00^{BC}\rangle + |11^{BC}\rangle\right)$. Здесь и далее мы записываем над кубитом название квантового провода, по которому он передается. Боб забирает один кубит из ЭПР пары, второй кубит остается у Алисы. На вход схемы подается трехкубитовое состояние

$$|\phi_1\rangle = |\psi\rangle|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha|0^A\rangle\left(|00^{BC}\rangle + |11^{BC}\rangle\right) + \beta|1^A\rangle\left(|00^{BC}\rangle + |11^{BC}\rangle\right)\right].$$

Оператор CNOT перепутывает передаваемый кубит $|\psi\rangle$ с одним из кубитов ЭПР пары. При этом возникает состояние

$$|\phi_2\rangle = (\text{CNOT} \otimes I)|\phi_1\rangle,$$

$$|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\alpha \left| \begin{smallmatrix} A \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle \left(\left| \begin{smallmatrix} B C \\ 00 \end{smallmatrix} \right\rangle + \left| \begin{smallmatrix} B C \\ 11 \end{smallmatrix} \right\rangle \right) + \beta \left| \begin{smallmatrix} A \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle \left(\left| \begin{smallmatrix} B C \\ 10 \end{smallmatrix} \right\rangle + \left| \begin{smallmatrix} B C \\ 01 \end{smallmatrix} \right\rangle \right) \right].$$

Состояние $|\varphi_2\rangle$ поступает на вход оператора $H \otimes I \otimes I$. В результате возникает состояние $|\varphi_3\rangle$. Учитывая свойства оператора H :

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle),$$

ВИДИМ, ЧТО

$$\begin{aligned} |\varphi_3\rangle &= (H \otimes I \otimes I)|\varphi_2\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left[\alpha \left(\left| \begin{smallmatrix} A \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle + \left| \begin{smallmatrix} A \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle \right) \left(\left| \begin{smallmatrix} B C \\ 00 \end{smallmatrix} \right\rangle + \left| \begin{smallmatrix} B C \\ 11 \end{smallmatrix} \right\rangle \right) + \beta \left(\left| \begin{smallmatrix} A \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle - \left| \begin{smallmatrix} A \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle \right) \left(\left| \begin{smallmatrix} B C \\ 10 \end{smallmatrix} \right\rangle + \left| \begin{smallmatrix} B C \\ 01 \end{smallmatrix} \right\rangle \right) \right]. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned} |\varphi_3\rangle &= \frac{1}{2} \left[\left| \begin{smallmatrix} A B \\ 00 \end{smallmatrix} \right\rangle \left(\alpha \left| \begin{smallmatrix} C \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle + \beta \left| \begin{smallmatrix} C \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle \right) + \left| \begin{smallmatrix} A B \\ 01 \end{smallmatrix} \right\rangle \left(\alpha \left| \begin{smallmatrix} C \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle + \beta \left| \begin{smallmatrix} C \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left| \begin{smallmatrix} A B \\ 10 \end{smallmatrix} \right\rangle \left(\alpha \left| \begin{smallmatrix} C \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle - \beta \left| \begin{smallmatrix} C \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle \right) + \left| \begin{smallmatrix} A B \\ 11 \end{smallmatrix} \right\rangle \left(\alpha \left| \begin{smallmatrix} C \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle - \beta \left| \begin{smallmatrix} C \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Согласно (5.13), если по проводам A и B распространяется состояние $\left| \begin{smallmatrix} A B \\ 00 \end{smallmatrix} \right\rangle$, то по проводу C распространяется кубит $|\psi\rangle$. В остальных случаях кубит, распространяющийся по проводу C , отличается от $|\psi\rangle$, однако может быть преобразован в $|\psi\rangle$ с помощью корректирующих операторов. Для распознавания сигналов, распространяющихся по проводам A и B , служат измерительные операторы M и N . При попадании на них двухкубитового оператора $\left| \begin{smallmatrix} A B \\ M N \end{smallmatrix} \right\rangle$ они выдают пару чисел (M, N) .

Корректирующий оператор имеет вид $X^M Y^N$. Рассмотрим его работу. Согласно (5.12),

- 1) если по проводам A и B распространяется состояние $\left| \begin{smallmatrix} A B \\ 00 \end{smallmatrix} \right\rangle$, то по проводу C распространяется кубит $\alpha \left| \begin{smallmatrix} C \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle + \beta \left| \begin{smallmatrix} C \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle = |\psi\rangle$. В этом случае $M = 0, N = 0$ и корректирующий оператор $X^0 Z^0 = I$.

- 2) если по проводам А и В распространяется состояние $\left| \begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right\rangle$, то по проводу С распространяется кубит $\alpha \left| \begin{smallmatrix} C \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle + \beta \left| \begin{smallmatrix} C \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle$. В этом случае $M = 0, N = 1$ и корректирующий оператор $X^1 Z^0 = X$.
- 3) если по проводам А и В распространяется состояние $\left| \begin{smallmatrix} A & B \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right\rangle$, то по проводу С распространяется кубит $\alpha \left| \begin{smallmatrix} C \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle - \beta \left| \begin{smallmatrix} C \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle$. В этом случае $M = 1, N = 0$ и корректирующий оператор $X^0 Z^1 = Z$.
- 4) если по проводам А и В распространяется состояние $\left| \begin{smallmatrix} A & B \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right\rangle$, то по проводу С распространяется кубит $\alpha \left| \begin{smallmatrix} C \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle - \beta \left| \begin{smallmatrix} C \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle$. В этом случае $M = 1, N = 1$ и корректирующий оператор $X^1 Z^1 = XZ$.

Глава 6. Информационная энтропия

6.1 Классическая информационная энтропия

Пусть классическая система может находиться в одном из n состояний, причем в состоянии k система находится с вероятностью p_k . Определим, согласно Шеннону, информационную энтропию S такой классической системы соотношением

$$S = -\sum_k p_k \log_2 p_k. \quad (6.1)$$

Согласно (6.1), информационная энтропия системы, находящейся с вероятностью 1 в одном из возможных состояний, равна нулю. Противоположный крайний случай – система, которая равновероятно находится в любом из n состояний. Согласно (6.1), информационная энтропия такой системы равна $\log_2 n$.

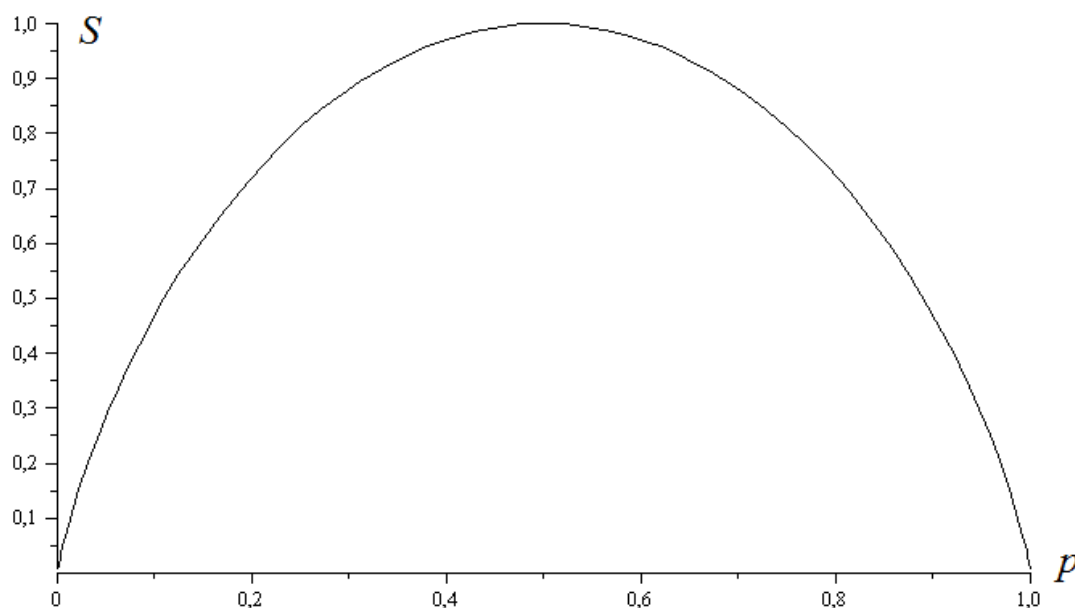


Рис.25. Зависимость классической информационной энтропии двухуровневой системы от вероятности реализации одного из состояний

Рассмотрим, для примера, систему, которая может находиться всего в двух возможных состояниях. Вероятность первого состояния равна p , вероятность второго $1-p$. Тогда, согласно (6.1), информационная энтропия такой системы равна:

$$S(p) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p). \quad (6.2)$$

Из (6.2) видно, что $S(0) = S(1) = 0$, $S(0.5) = \log_2 2 = 1$. График зависимости информационной энтропии от вероятности p представлен на рис.25. Из рисунка видно, что энтропия является функцией, симметричной относительно значения аргумента $p = \frac{1}{2}$.

Отметим, что при $p = 0$ энтропия рассчитывается как предел (6.2) при $p \rightarrow 0$. То же замечание справедливо и для общей формулы (6.1).

6.2 Квантовая информационная энтропия

Прежде, чем вводить квантовую энтропию, определим функцию от оператора. Пусть \hat{L} - линейный оператор, λ_k и $|\psi_k\rangle$ - его собственные числа и собственные вектора. Тогда оператор можно представить в виде:

$$\hat{L} = \sum_n \lambda_n |\Psi_n\rangle \langle \Psi_n|. \quad (6.3)$$

Определим функцию от оператора \hat{L} соотношением:

$$f(\hat{L}) = \sum_n f(\lambda_n) |\Psi_n\rangle \langle \Psi_n|. \quad (6.4)$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x \log_2 x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Введем еще след от матрицы оператора \hat{A} соотношением,

$$\text{Tr} \hat{A} = \sum_n \langle \Psi_n | \hat{A} | \Psi_n \rangle. \quad (6.5)$$

Пусть $\hat{\rho}$ - матрица плотности рассматриваемой системы. Квантовой энтропией (энтропией фон-Неймана) называется величина

$$S(\hat{\rho}) = \text{Tr}(f(\hat{\rho})). \quad (6.6)$$

Используя (6.3) – (6.6), получаем

$$\hat{\rho} = \sum_n \lambda_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|, \quad (6.7)$$

$$S(\hat{\rho}) = \text{Tr} \left(\sum_n f(\lambda_n) |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n| \right),$$

или

$$S(\hat{\rho}) = \sum_{n,k} f(\lambda_n) \langle\Psi_k|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|\Psi_k\rangle = \sum_{n,k} f(\lambda_n) \delta_{kn}.$$

Окончательно

$$S(\hat{\rho}) = \sum_n f(\lambda_n) = -\sum_n \lambda_n \log_2(\lambda_n). \quad (6.8)$$

Рассчитаем квантовую энтропию нескольких систем.

Пример 1. Рассмотрим сначала один кубит $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Его матрица плотности

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (6.9)$$

или

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|) = \\ &= \alpha\alpha^*|0\rangle\langle 0| + \alpha\beta^*|0\rangle\langle 1| + \beta\alpha^*|1\rangle\langle 0| + \beta\beta^*|1\rangle\langle 1|. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Таким образом, матрица плотности кубита имеет вид

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Собственные числа матрицы плотности являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} |\alpha|^2 - \lambda & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Учитывая условие нормировки $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, находим собственные числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Согласно (7.8)

$$S(\hat{\rho}_A) = -\lambda_1 \log_2(\lambda_1) - \lambda_2 \log_2(\lambda_2) = 0. \quad (6.12)$$

Пример 2. Рассмотрим теперь перепутанное двухкубитовое состояние – одно из состояний Белла

$$|\beta_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A\rangle|1_B\rangle - |1_A\rangle|0_B\rangle).$$

Соответствующая матрица плотности имеет вид:

$$\hat{\rho}_{AB} = |\beta_{11}\rangle\langle\beta_{11}| = \frac{1}{2}(|0_A\rangle|1_B\rangle - |1_A\rangle|0_B\rangle)(\langle 0_A| \langle 1_B| - \langle 1_A| \langle 0_B|). \quad (6.13)$$

Построим теперь матрицу плотности подсистемы А усреднив матрицу плотности системы АВ по всем возможным состояниям подсистемы В:

$$\hat{\rho}_A = \langle 0_B| \hat{\rho}_{AB} |0_B\rangle + \langle 1_B| \hat{\rho}_{AB} |1_B\rangle.$$

Используя (6.13), получаем

$$\hat{\rho}_A = \frac{1}{2}|0_A\rangle\langle 0_A| + \frac{1}{2}|1_A\rangle\langle 1_A|. \quad (6.14)$$

Таким образом, матрица плотности имеет вид:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Собственные числа матрицы плотности являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (6.16)$$

Таким образом, матрица плотности имеет двукратный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$.
Согласно (6.8)

$$S(\hat{\rho}_A) = 1. \quad (6.17)$$

Пример 3. Рассмотрим теперь двухкубитовое состояние общего вида:

$$|\psi\rangle = a|0_A\rangle|0_B\rangle + b|0_A\rangle|1_B\rangle + c|1_A\rangle|0_B\rangle + d|1_A\rangle|1_B\rangle$$

с условием нормировки

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1.$$

Соответствующая матрица плотности имеет вид:

$$\hat{\rho}_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (6.18)$$

Построим теперь матрицу плотности подсистемы А усреднив матрицу плотности системы АВ по всем возможным состояниям подсистемы В:

$$\hat{\rho}_A = \langle 0_B | \hat{\rho}_{AB} | 0_B \rangle + \langle 1_B | \hat{\rho}_{AB} | 1_B \rangle.$$

Используя (6.18), получаем

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_A = & (|a|^2 + |b|^2)|0_A\rangle\langle 0_A| + (ac^* + bd^*)|0_A\rangle\langle 1_A| + \\ & + (a^*c + b^*d)|1_A\rangle\langle 0_A| + (|c|^2 + |d|^2)|1_A\rangle\langle 1_A|. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Таким образом, матрица плотности имеет вид:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & ac^* + bd^* \\ a^*c + b^*d & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

Собственные числа матрицы плотности являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} |a|^2 + |b|^2 - \lambda & ac^* + bd^* \\ a^*c + b^*d & |c|^2 + |d|^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - \lambda + |a|^2 |d|^2 + |b|^2 |c|^2 - ab^*c^*d - a^*bcd^* = 0. \quad (6.21)$$

Согласно (6.8)

$$S(\hat{\rho}_A) = -\lambda_1 \log_2 \lambda_1 - \lambda_2 \log_2 \lambda_2. \quad (6.22)$$

Замечание. Предыдущие примеры показывают, что значение квантовой энтропии $S(\hat{\rho}_A)$ можно использовать, для того, чтобы характеризовать степень перепутанности состояния АВ. Однако, существует и более прямой метод оценки степени перепутанности двухкубитового состояния.

Рассмотрим, наряду с общей волновой функцией двухкубитового состояния

$$|\psi\rangle = a|0_A\rangle|0_B\rangle + b|0_A\rangle|1_B\rangle + c|1_A\rangle|0_B\rangle + d|1_A\rangle|1_B\rangle, \quad (6.23)$$

прямое произведение двух кубитов

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) = \\ &= \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle \end{aligned} \quad (6.24)$$

Приравнивая коэффициенты в разложениях (6.23) и (6.24), находим

$$a = \alpha\gamma, \quad b = \alpha\delta, \quad c = \beta\gamma, \quad d = \beta\delta. \quad (6.25)$$

Из (6.25) вытекает необходимое и достаточное условие на коэффициенты произвольного двухкубитового состояния, при выполнении которого двухкубитовое состояние является тензорным произведением двух однокубитовых состояний:

$$ad - bc = 0. \quad (6.26)$$

При выполнении условия (6.26), двухкубитовое состояние является совершенно не перепутанным. Следовательно, величину

$$P = ad - bc \quad (6.27)$$

можно рассматривать как меру перепутанности двухкубитового состояния.

Литература

1. Нильсен М., Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир. 2006 г. - 824 с.
2. Э. Стин. Квантовые вычисления, М.- Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000 г. – 111 с.
3. Китаев А., Шень А., Вялый М. Классические и квантовые вычисления. М., МЦНМО, 1999 г. – 192 с.
4. Валиев К.А. Квантовые компьютеры: надежды и реальность. Ижевск, РХД, 2004.–320 с.
5. Бауместер Д., Экерт А. Физика квантовой информации. М., Постмаркет, 2002 г. – 376 с.
6. Холево А.С. Введение в квантовую теорию информации. М., МЦНМО, 2002 г. - 228 с.
7. Горбачев В.Н., Жилиба А.И. Физические основы современных информационных процессов. Ст.-Петербург, Издательство "Петербургский институт печати", 2004 г. – 76 с.
8. Физика квантовой информации (Квантовая криптография. Квантовая телепортация. Квантовые вычисления). Сборник под редакцией Боумейстер Д., Экерт А., Цайлингер А. М. Постмаркет, 2002 г. - 376 с.
9. Белокуров В.В., Тимофеевская О.Д., Хрусталева О.А. Квантовая телепортация – обыкновенное чудо. Серия: Регулярная и хаотическая динамика. Ижевск, 2000 г. – 256 с.
10. Попов И.Ю. Квантовый компьютер и квантовые алгоритмы. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2007г. - 88 с.
11. Прескилл Квантовая информация и квантовые вычисления. Т.1.М.- Ижевск: 2008. - 464 с.
12. Имре Ш., Балаж Ф. Квантовые вычисления и связь. Инженерный подход. М., Физматлит: 2008. – 320 с.
13. Стиб В.-Х., Харди Й. - Задачи и их решения в квантовых вычислениях и квантовой теории информации. М. – Ижевск: 2007. – 296 с.
14. Bennet C. H., Brassard G., Crepeau C. Teleporting and unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70.
15. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can Quantum - Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete? // Phys. Rev. 1935. V. 47.
16. J.S.Bell. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox, Physics 1, 195 (1964)
17. R. Feynman. Simulating physics with computers // Internat. J. Theoret. Phys. 21, 467-488 (1982).



СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы и успешно реализовал инновационную образовательную программу «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий», что позволило выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворять возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях науки. Реализация этой программы создала основу формирования программы дальнейшего развития вуза до 2015 года, включая внедрение современной модели образования.

ИСТОРИЯ КАФЕДРЫ ФОТОНИКИ И ОПТОИНФОРМАТИКИ

Кафедра "Фотоника и оптоинформатика" была создана летом 2002 года. Одной из ее важнейших задач является организация учебного процесса и подготовка специалистов по оптоинформатике – стремительно развивающейся новой области науки и техники, в которой разрабатываются оптические технологии сверхбыстрой передачи, обработки и записи информации, создаются быстродействующие оптические компьютеры и системы искусственного интеллекта. Разработка таких оптических информационно-телекоммуникационных технологий, представляющих собой информационные технологии нового поколения, является приоритетным направлением развития российской науки, техники и технологий.

В рамках образовательного направления 200600 «Фотоника и оптоинформатика» студентам читаются лекционные курсы по оптической физике, теории информации и кодирования, архитектуре вычислительных систем, технологии программирования, цифровым оптическим вычислениям, оптическим технологиям искусственного интеллекта, голографическим системам записи информации и другим актуальным проблемам оптоинформатики, а также по квантовой информатике. Эти лекционные курсы поддержаны эксклюзивными учебно-научными экспериментальными практикумами.

Среди научных подразделений кафедры – научно-образовательный центр фемтосекундной оптики и фемтотехнологий, лаборатория компьютерного моделирования и параллельных вычислений, проблемная лаборатория волновых процессов.

Среди студентов и аспирантов кафедры – стипендиаты Президента и Правительства Российской Федерации, победители конкурсов научных работ, проводимых Российской Академией наук, крупнейшими мировыми научными обществами, такими как INTAS (Фонд научно-исследовательских работ Европейского сообщества), SPIE (Международное общество инженеров-оптиков), CRDF (Американский фонд гражданских исследований и развития), OSA (Оптическое общество Америки).

Кафедра фотоники и оптоинформатики постоянно занимает призовые места по итогам конкурсов ведущих научно-педагогических коллективов ИТМО.